

شماره‌ی تکلیف: ۱۱

مسئله‌ی ۱:

نشان دهید لاپلاسی یک میدان برداری در دستگاه مختصات استوانه‌ای به شکل زیر است

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \hat{e}_\rho \left(\nabla^2 A_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} - \frac{A_\rho}{\rho^2} \right) + \hat{e}_\phi \left(\nabla^2 A_\phi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{\rho^2} \right) + \hat{e}_z \nabla^2 A_z$$

مسئله‌ی ۲:

نشان دهید لاپلاسی یک میدان برداری در دستگاه مختصات کروی به شکل زیر است

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} = & \hat{e}_r \left(\frac{1}{r} \nabla^2 (r A_r) - \frac{2}{r} \nabla \cdot \mathbf{A} \right) \\ & + \hat{e}_\theta \left(\nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\theta - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \\ & + \hat{e}_\phi \left(\nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\phi \right) \end{aligned}$$

مسئله‌ی ۳:

میدان برداری زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathbf{F} = (16xy - z)\hat{e}_x + 8x^2\hat{e}_y - x\hat{e}_z$$

الف) آیا \mathbf{F} میدانی غیر چرخشی است؟

ب) شار میدان \mathbf{F} را بر روی سطح مکعبی که دیواره‌ی آن در $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$ است، محاسبه کنید.

ج) انتگرال گردش میدان \mathbf{F} را بر محیط مربعی که در صفحه‌ی $z=0$ قرار دارد و اضلاع آن در $x=0, x=1, y=0, y=1$ قرار دارند، حساب کنید.

مسئله‌ی ۴:

لاپلاسی هر یک از میدان‌های اسکالر زیر را حساب کنید.

الف) $f(x, y, z) = xy^2z^3$

ب) $g(\rho, \phi, z) = \frac{\sin \phi}{\rho}$

ج) $h(r, \theta, \phi) = r^2 \sin \theta \cos \phi$

مسئله ۵:

نشان دهید میدان برداری زیر هم سلونوئیدی و هم غیرچرخشی است

$$\mathbf{F} = yz\hat{e}_x + xz\hat{e}_y + xy\hat{e}_z$$