شماره‌ی تکلیف: ۱۴

مسئله‌ی ۱:

نشان دهید

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

پاسخ ۱:

دو حالتِ $a < 0$ و $a > 0$ را به طور مجزا بررسی می‌کنیم.

الف $a > 0$

انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)f(x)dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)f(y/a)dy = \frac{1}{a}f(0) \qquad (۱)$$

اما با توجه به ویژگی‌های تابع دلتا، می‌دانیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(x)\delta(x)dx = f(0) \qquad (۲)$$

با مقایسه‌ی روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x); \qquad a > 0$$

ب $a < 0$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)f(x)dx &= \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(y)f(y/a)dy \\ &= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)f(y/a)dy \\ &= -\frac{1}{a}f(0)\end{aligned}$$

(توجه کنید که برای محاسبه‌ی انتگرال، از تغییر متغیر $y = ax$ استفاده شده است. و چون a منفی است، وقتی حد انتگرال برای x برابر با $-\infty$ باشد، برای y برابر با $+\infty$ خواهد بود و برعکس) بدین ترتیب با مقایسه با رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$\delta(ax) = -\frac{1}{a}\delta(x); \qquad a < 0$$

نتیجه ی قسمت‌های الف و ب را می‌توان در رابطه‌ی زیر خلاصه کرد:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

از این رابطه بلافاصله زوج بودنِ تابع دلتای دیراک نتیجه می‌شود زیرا به ازای $a = -1$ داریم:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

مسئله‌ی ۲:

نشان دهید

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{|2a|}\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]$$

پاسخ ۲:

عبارتِ $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$ دارای دو ریشه‌ی $x=+a$ و $x=-a$ است. بنابر این $\delta(x^2-a^2)$ همه جا صفر است مگر در نقاطِ $x=\pm a$. بنابر این می‌توان نوشت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x^2-a^2)dx=\int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} f(x)\delta(x^2-a^2)dx + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta(x^2-a^2)dx$$

ϵ مقدارِ بسیار کوچکی است. انتگرالِ اول حولِ $x=-a$ مخالفِ صفر است. بنابر این در انتگرالِ اول می‌توان نوشت:

$$\delta(x^2-a^2)=\delta[(x-a)(x+a)]=\delta[(-2a)(x+a)]$$

همچنین انتگرالِ دوم حولِ $x=+a$ مخالفِ صفر است. بنابر این در انتگرالِ دوم می‌توان نوشت: $\delta(x^2-a^2)=\delta[(x-a)(x+a)]=\delta[(x-a)(2a)]$. در نتیجه:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x^2-a^2)dx &= \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} f(x)\delta(x^2-a^2)dx \\ &\quad + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta(x^2-a^2)dx \\ &= \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} f(x)\delta[-2a(x+a)]dx \\ &\quad + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta[+2a(x-a)]dx \\ &= \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} f(x)\frac{1}{|2a|}\delta[(x+a)]dx \\ &\quad + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\frac{1}{|2a|}\delta[(x-a)]dx\end{aligned}$$

تساویِ آخر با توجه به نتیجه‌ی مسئله‌ی ۱ نوشته شده است. بدین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{|2a|}\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]$$

مسئله‌ی ۳:

انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\int_{-2}^{2}(x^2-x-5)\delta(-3x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x^2+x-2)\exp(x)dx$$

$$\int_{\infty}^{-\infty}\cos(t)\delta(t-x)dt$$

$$\int_{-4}^{4}(t-2)^2\,\delta'\left(-\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}\right)dt$$

مسئله‌ی ۴:

بارهای نقطه‌ای $q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_6$ در نقاطی با مختصاتِ

$$(a_1,0,0),\ (0,a_2,0),\ (0,0,a_3),\ (-a_4,0,0),\ (0,-a_5,0),\ (0,0,-a_6)$$

در نظر بگیرید.

برای این توزیعِ بار، با استفاده از تابع دلتای دیراک، یک چگالی حجمی بار بنویسید.

مسئله‌ی ۵:

هر یک از توزیعِ بارهای زیر را به صورت یک چگالی حجمی بار بنویسید:

- **الف)** دوقطبیِ الکتریکی: بارهای نقطه‌ایِ $+q$ و $-q$ در مکان‌های $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_0+\frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{n}}$ و $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_0-\frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{n}}$ قرار دارند. ($\hat{\boldsymbol{n}}$ بردار یکه در راستایِ بردارِ $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}$ است.)
- **ب)** بار الکتریکی با چگالیِ یکنواختِ σ_s بر روی کره‌ای به شعاعِ R توزیع شده است.
- **ج)** بار الکتریکیِ Q به طورِ یکنواخت بر روی حلقه‌ی دایره‌ای به شعاعِ R توزیع شده است. حلقه در صفحه‌ی xy قرار دارد و مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق است.