

شماره‌ی تکلیف: ۲

مسئله‌ی ۱:

بردارهای $A = 3\hat{e}_x + \hat{e}_y - 2\hat{e}_z$ و $B = \hat{e}_x + 2\hat{e}_y + 2\hat{e}_z$ و $C = 2\hat{e}_y + \hat{e}_z$ مفروض‌اند. هر یک از موارد زیر را محاسبه کنید.

- ☞ (الف) $A - 2B$
- ☞ (ب) $(2A - 3B) \cdot (A + B)$
- ☞ (ج) $A \times (B \times C)$
- ☞ (د) $B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$

مسئله‌ی ۲:

بردارهای $A = 4\hat{e}_x + \hat{e}_y + 2\hat{e}_z$ و $B = 3\hat{e}_x + \hat{e}_y + 2\hat{e}_z$ و $C = 3\hat{e}_x + \hat{e}_y + 7\hat{e}_z$ را در نظر بگیرید.

- ☞ (الف) بردارِ یکه در راستای بردار $A - B$ را به دست آورید.
- ☞ (ب) بردارِ یکه‌ای را بیابید که بر بردارهای B و C عمود است.
- ☞ (ج) آیا این سه بردار در یک صفحه قرار دارند؟

مسئله‌ی ۳:

رئوس مثلثی در نقاط $(1, -1, 2)$ و $(3, 0, 4)$ و $(-1, 2, -2)$ قرار دارند.

- ☞ (الف) مساحت مثلث را بیابید.
- ☞ (ب) بردارِ یکه‌ی عمود بر سطح این مثلث را بیابید.

مسئله‌ی ۴:

رابطه‌ی زیر به اتحاد لاگرانژ معروف است. درستی آن را بررسی کنید

$$A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0$$

مسئله ۵:

اگر $A \times B = A \times C$ آیا بردارهای B و C لزوماً برابرند؟ اگر چنین نیست چه شرط دیگری لازم است تا آنها برابر باشند؟

مسئله ۶:

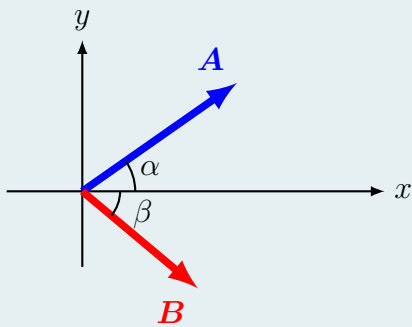
بردارهای $A = 4\hat{e}_x + \hat{e}_y + 2\hat{e}_z$ و $B = 3\hat{e}_x + \hat{e}_y + 2\hat{e}_z$ مفروضاند. کسینوس‌های هادی بردارهای $A + B$ و $A - B$ را محاسبه کنید.

مسئله ۷:

دو بردار دلخواه A و B در نظر بگیرید. نشان دهید مؤلفه‌ای از B که موازی با A است از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$B_{\parallel} = \frac{B \cdot A}{A \cdot A} A$$

مسئله ۸:

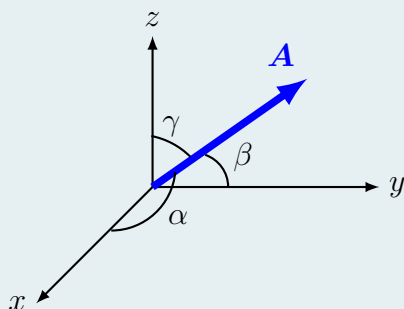


با توجه به شکل روبرو با نوشتن مؤلفه‌های بردارهای A و B درستی روابط مثلثاتی زیر را بررسی کنید:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

مسئله ۹:



طبق تعریف، کسینوس‌های هادی یک بردار کسینوس زوایای بین آن بردار و محورهای مختصات است. کسینوس‌های هادی بردار A را به دست آورید و نشان دهید:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

مسئله ۱۰:

نشان دهید بردارهای زیر مستقل خطی هستند:

$$\mathbf{a}_1 = \hat{e}_y - 2\hat{e}_z; \quad \mathbf{a}_2 = \hat{e}_x - \hat{e}_y + \hat{e}_z; \quad \mathbf{a}_3 = \hat{e}_x + 2\hat{e}_y + \hat{e}_z$$

راهنمایی: بردار A با رابطه‌ی زیر

$$\mathbf{A} = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \dots + k_n \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{a}_i$$

یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ نامیده می‌شود.

اگر یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ برابر با صفر باشد، یعنی $\sum_{i=1}^n k_i \mathbf{a}_i = 0$ به شرطی که حداقل یکی از k_i ها مخالف صفر باشد، در این صورت این مجموعه بردار را وابسته ی خطی می‌نامند. در صورتی که رابطه‌ی $\sum_{i=1}^n k_i \mathbf{a}_i = 0$ فقط وقتی برقرار باشد که همه‌ی k_i ها برابر با صفر باشند، این مجموعه بردار را مستقل خطی می‌نامیم.

مسئله ۱۱:

مقدار هر یک از عبارات زیر را حساب کنید.

$$\text{الف) } \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = ?$$

$$\text{ج) } \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{mjk} = ?$$

$$\text{ب) } \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \epsilon_{ijk} = ?$$

$$\text{د) } \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = ?$$

مسئله ۱۲:

نشان دهید

$$\hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) = \epsilon_{ijk}$$

که در آن \hat{e}_n ها $(n = 1, 2, 3)$ بردارهای واحد متعامد راستگرد با ترتیب 1, 2, 3 هستند.

مسئله ۱۳:

نشان دهید

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

مسئله ۱۴:

درستی هر یک از اتحادهای زیر را بررسی کنید. (از نمادگذاری کرونکر و لوی چویتا استفاده کنید)

☞ (الف) $A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A)$

☞ (ب) $A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$

☞ (ج) $(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)$

پاسخ ۱۴: (الف)

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= \sum_{k=1}^3 A_k (B \times C)_k \\ &= \sum_{k=1}^3 A_k \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ijk} B_i C_j \\ &= \sum_{i=1}^3 B_i \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{jki} C_j A_k \quad (\text{توجه کنید که } \epsilon_{jki} = \epsilon_{ijk}) \\ &= \sum_{i=1}^3 B_i (C \times A)_i \\ &= B \cdot (C \times A) \end{aligned}$$