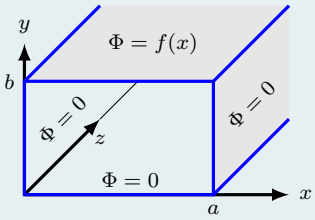
شماره‌ی تکلیف: ۲۵

مسئله‌ی ۱:

کانالی با مقطع مستطیل و طول نامتناهی با دیواره‌های رسانا در نظر بگیرید. دیواره‌ها با معادلاتِ $x=0$، $x=a$، $y=0$ و $y=b$ مشخص می‌شوند. دیواره‌های $x=0$، $x=a$، $y=0$ در پتانسیلِ صفر قرار دارند. دیواره‌ی $y=b$ نسبت به دیواره‌های دیگر عایق بندی شده است و در پتانسیلی که با تابع $f(x)$ تعیین می‌شود، نگه داشته شده است. پتانسیل الکتریکی را درون کانال پیدا کنید.



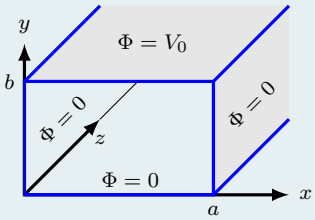
$$\Phi(0,y)=0$$
$$\Phi(x,0)=0$$
$$\Phi(a,y)=0$$
$$\Phi(x,b)=f(x)$$

پاسخ ۱:

$$\Phi(x,y)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(n\pi/a)y}{\sinh(n\pi/a)b}\sin\frac{n\pi}{a}x\int_0^a f(x')\sin\frac{n\pi}{a}x'dx'$$

مسئله‌ی ۲:

مسئله‌ی قبل را برای حالتی که $f(x)=V_0$ حل کنید



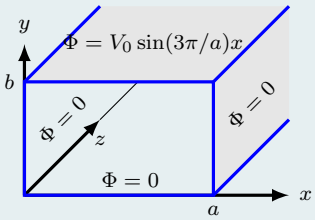
$$\Phi(0,y)=0$$
$$\Phi(x,0)=0$$
$$\Phi(a,y)=0$$
$$\Phi(x,b)=V_0$$

پاسخ ۲:

$$\Phi(x,y)=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=odd}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sinh(n\pi/a)y}{\sinh(n\pi/a)b}\sin\frac{n\pi}{a}x$$
$$=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\frac{\sinh[(2k+1)\pi/a]y}{\sinh[(2k+1)\pi/a]b}\sin\frac{(2k+1)\pi}{a}x$$

مسئله‌ی ۳:

مسئله‌ی قبل را برای وقتی که $f(x)=V_0\sin(3\pi/a)x$ حل کنید.



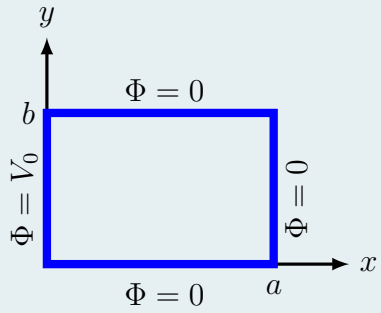
$$\Phi(0,y) = 0$$
$$\Phi(x,0) = 0$$
$$\Phi(a,y) = 0$$
$$\Phi(x,b) = V_0 \sin\frac{3\pi}{a}x$$

پاسخ ۳:

$$\Phi(x,y) = V_0 \frac{\sinh(3\pi/a)y}{\sinh(3\pi/a)b} \sin\frac{3\pi}{a}x$$

مسئله‌ی ۴:

یک کانال نامتناهی با مقطع مستطیلی و دیواره‌های تخت رسانا (که نسبت به هم عایق بندی شده‌اند) در نظر بگیرید. دیواره‌های کانال در $x = 0$ و $x = a$ و $y = 0$ و $y = b$ قرار دارند. پتانسیل الکتریکی را درون این کانال حساب کنید. پتانسیل الکتریکی بر روی دیواره‌های کانال به شرح زیر است



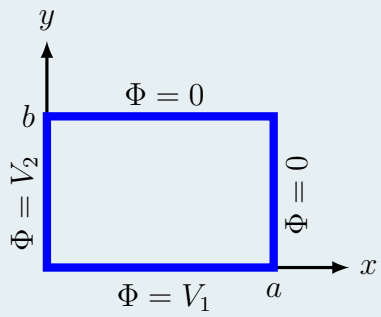
$$\Phi(x,0) = 0$$
$$\Phi(x,b) = 0$$
$$\Phi(0,y) = V_0$$
$$\Phi(a,y) = 0$$

پاسخ ۴:

$$\Phi(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k+1)\pi} \frac{\sinh\frac{(2k+1)\pi}{b}(a-x)}{\sinh\frac{(2k+1)\pi a}{b}} \sin\frac{(2k+1)\pi y}{b}$$

مسئله‌ی ۵:

یک کانال نامتناهی با مقطع مستطیلی و دیواره‌های تخت رسانا (که نسبت به هم عایق بندی شده‌اند) در نظر بگیرید. دیواره‌های کانال در $x = 0$ و $x = a$ و $y = 0$ و $y = b$ قرار دارند. الف) پتانسیل الکتریکی را درون این کانال حساب کنید. ب) چگالی سطحی بار الکتریکی را بر روی صفحه‌ی $x = a$ تعیین کنید.
پتانسیل الکتریکی بر روی دیواره‌های کانال به شرح زیر است



$$\Phi(x,0) = V_1$$
$$\Phi(x,b) = 0$$
$$\Phi(0,y) = V_2$$
$$\Phi(a,y) = 0$$

پاسخ ۵:

الف)

$$\Phi(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4V_2}{(2k+1)\pi} \frac{\sinh \frac{(2k+1)\pi}{b}(a-x)}{\sinh \frac{(2k+1)\pi a}{b}} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{b} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4V_1}{(2k+1)\pi} \frac{\sinh \frac{(2k+1)\pi}{a}(b-y)}{\sinh \frac{(2k+1)\pi b}{a}} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{a}$$

ب)

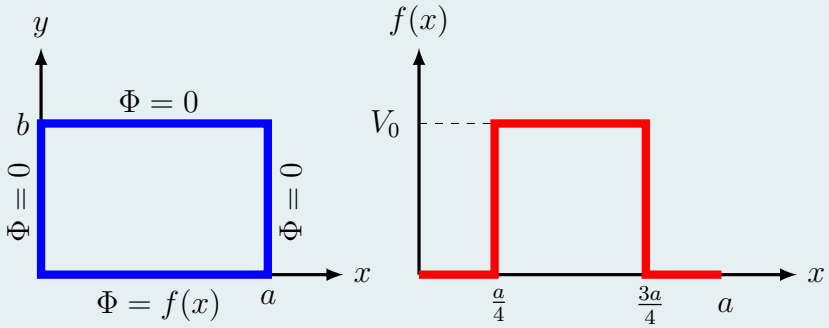
$$\sigma = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\epsilon_0 V_2}{b} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{b} y}{\sinh \frac{(2k+1)\pi a}{b}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\epsilon_0 V_1}{a} \frac{\sinh \frac{(2k+1)\pi}{a}(b-y)}{\sinh \frac{(2k+1)\pi b}{a}}$$

مسئله‌ی ۶:

یک کانال نامتناهی با مقطع مستطیلی و دیواره های تخت رسانا (که نسبت به هم عایق بندی شده‌اند) در نظر بگیرید. دیواره‌های کانال در $x=0$ و $x=a$ و $y=0$ و $y=b$ قرار دارند. پتانسیل الکتریکی را درون این کانال حساب کنید. پتانسیل الکتریکی بر روی دیواره‌های کانال به شرح زیر است

$$\Phi(x,0)=f(x);\quad \Phi(x,b)=0;\quad \Phi(0,y)=0;\quad \Phi(a,y)=0$$

که در آن $f(x)$ در نمودار شکل زیر مشخص شده است



پاسخ ۶:

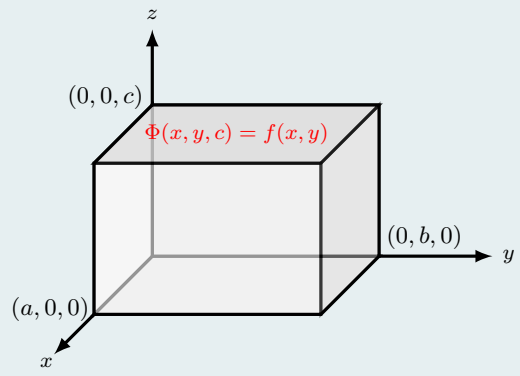
$$\Phi(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4V_0}{k\pi}\frac{\cos\frac{k\pi}{4}}{\sinh\frac{k\pi b}{a}}\sin\frac{k\pi x}{a}\sinh\frac{k\pi(b-y)}{a}$$

مسئله‌ی ۷:

مکعبی تو خالی با دیواره‌های رسانا در نظر بگیرید. دیواره‌های رسانا با معادلات زیر مشخص می‌شوند:

$$x=0,\ x=a\qquad y=0,\ y=b\qquad z=0,\ z=c$$

همه‌ی دیواره‌ها در پتانسیل صفر قرار دارند به جز دیواره‌ی $z=c$ که نسبت به دیواره‌های دیگر عایق‌بندی شده و در پتانسیل $f(x,y)$ نگه داشته شده است. پتانسیل الکتریکی را درون این مکعب پیدا کنید.



$$\Phi(0,y,z)=0$$
$$\Phi(a,y,z)=0$$
$$\Phi(x,0,z)=0$$
$$\Phi(x,b,z)=0$$
$$\Phi(x,y,0)=0$$
$$\Phi(x,y,c)=f(x,y)$$

پاسخ ۷:

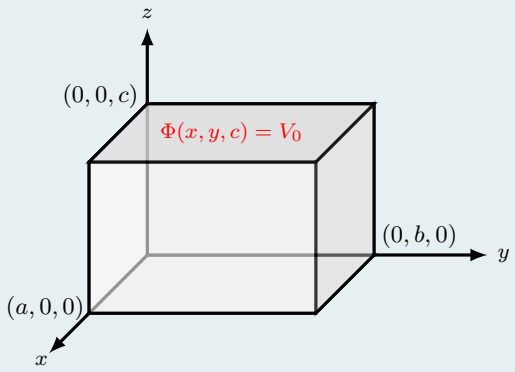
$$\Phi(x,y,z)=\frac{4}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sinh k_{nm}z}{\sinh k_{nm}c}\sin p_n x\sin q_m y \times\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin p_n x\sin q_m y dxdy\right]$$

که در آن

$$p_n=\frac{n\pi}{a},\qquad q_m=\frac{m\pi}{b},\qquad k_{nm}=\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}$$

مسئله‌ی ۸:

مثال قبل را با شرط $f(x,y)=V_0$ حل کنید و چگالی سطحی بار الکتریکی را بر روی سطح $z=c$ به دست آورید.



$$\Phi(0,y,z)=0$$
$$\Phi(a,y,z)=0$$
$$\Phi(x,0,z)=0$$
$$\Phi(x,b,z)=0$$
$$\Phi(x,y,0)=0$$
$$\Phi(x,y,c)=V_0$$

پاسخ ۸:

$$\Phi(x,y,z)=\frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{n=\text{فرد}}^{\infty}\sum_{m=\text{فرد}}^{\infty}\frac{1}{nm}\frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}\right)z}{\sinh\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}\right)c}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y$$

$$\Phi(x,y,z)=\frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2r+1)(2s+1)}\times\frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{(2r+1)^2\pi^2}{a^2}+\frac{(2s+1)^2\pi^2}{b^2}}\right)z}{\sinh\left(\sqrt{\frac{(2r+1)^2\pi^2}{a^2}+\frac{(2s+1)^2\pi^2}{b^2}}\right)c}\times\sin\frac{(2r+1)\pi}{a}x\times\sin\frac{(2s+1)\pi}{b}y\right]$$

و چگالی سطحی بار بر روی سطح $z = c$ را می‌توان به شکل زیر محاسبه کرد

$$\sigma = \epsilon_0 E_n\Big|_{z=c} = \epsilon_0 \left(-\nabla\Phi\right)\cdot\left(-\hat{\boldsymbol{k}}\right) = \epsilon_0 \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=c}$$

$$\sigma(x,y) = \frac{16V_0\epsilon_0}{\pi^2}\sum_{n=\text{فرد}}^{\infty}\sum_{m=\text{فرد}}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}\right)}{nm}\left[\coth\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}\right)c\right] \times\left(\sin\frac{n\pi}{a}x\right)\left(\sin\frac{m\pi}{b}y\right)$$

و یا

$$\sigma(x,y) = \frac{16V_0\epsilon_0}{\pi^2}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{\frac{(2r+1)^2\pi^2}{a^2}+\frac{(2s+1)^2\pi^2}{b^2}}}{(2r+1)(2s+1)} \times\coth\left(\sqrt{\frac{(2r+1)^2\pi^2}{a^2}+\frac{(2s+1)^2\pi^2}{b^2}}\right)c \times\sin\frac{(2r+1)\pi}{a}x \times\sin\frac{(2s+1)\pi}{b}y\right]$$