شماره‌ی تکلیف: ۲۶

مسئله‌ی ۱:

درون کره‌ای به شعاع R، بار الکتریکی با چگالی ثابت ρ_0 توزیع شده است.
الف) با حل معادله‌ی لاپلاس و پواسون، پتانسیل الکتریکی را درون و بیرون کره به دست آورید.
ب) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف، میدان الکتریکی را درون و بیرون کره به دست آورید.

پاسخ ۱:

مسئله‌ی ۲:

دو پوسته‌ی کروی هم‌مرکز به شعاع‌های a و b $(b > a)$ در نظر بگیرید. پوسته‌ی داخلی در پتانسیل صفر قرار دارد و پتانسیل پوسته‌ی خارجی تابعی از زاویه‌ی قطبی θ در دستگاه مختصات کروی به صورت $V_0 \cos\theta$ است. پتانسیل الکتریکی را در فضای بین دو کره حساب کنید.

پاسخ ۲:

$$\Phi = \frac{V_0 b^2}{b^3 - a^3}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta$$

مسئله‌ی ۳:

دو پوسته‌ی رسانای کروی هم‌مرکز به شعاع‌های a و b $(b > a)$ در نظر بگیرید. کره‌ی کوچک‌تر دارای بار الکتریکی سطحی با چگالی یکنواخت σ_0 است و کره‌ی بزرگتر در پتانسیل V_0 نگه داشته شده است. پتانسیل الکتریکی را در فضای بین دو کره پیدا کنید.

پاسخ ۳:

مسئله‌ی ۴:

دو پوسته‌ی کروی هم‌مرکز به شعاع‌های a و b $(b > a)$ در نظر بگیرید. کره‌ی کوچک‌تر دارای پتانسیل V_0 است و کره‌ی بزرگ‌تر دارای بار سطحی با چگالی $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ است.
الف) پتانسیل الکتریکی را در نواحی $a < r < b$ و $r > b$ به دست آورید.
ب) چگالی سطحی بار را روی سطح کره‌ی کوچک‌تر پیدا کنید.
ج) بار کل این سیستم چقدر است؟

پاسخ ۴: الف)

$$\Phi(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{aV_0}{r} + \dfrac{(b^3 - a^3)\sigma_0 \cos\theta}{3\epsilon_0 r^2}, & r \geq b \\ \dfrac{aV_0}{r} + \dfrac{(r^3 - a^3)\sigma_0 \cos\theta}{3\epsilon_0 r^2}, & a \leq r \leq b \end{cases}$$

مسئله‌ی ۵:

سطح یک پوسته‌ی کروی به شعاع R دارای پتانسیل $\Phi(\theta) = V_0 \sin^2(\theta/2)$ است. پتانسیل الکتریکی را درون و بیرون این پوسته‌ی کروی به دست آورید.

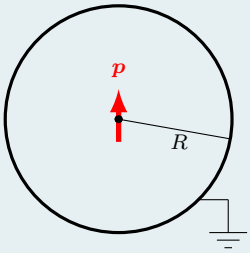
پاسخ ۵:

$$\Phi_{in} = \frac{V_0}{2a}(a - r\cos\theta)$$

$$\Phi_{out} = \frac{V_0}{2}\left(\frac{a}{r} - \frac{a^2}{r^2}\cos\theta\right)$$

مسئله‌ی ۶:

یک دو قطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی $\boldsymbol{p}$، درون یک پوسته‌ی رسانای کروی به شعاع R قرار دارد. پتانسیل پوسته صفر است. پتانسیل الکتریکی را درون پوسته به دست آورید.



پاسخ ۶:

مسئله‌ی ۷:

یک چهار قطبی محوری، از سه بار نقطه‌ای q و $-2q$ و q تشکیل شده است که روی محور z، به ترتیب در نقاط $z = -l$ و $z = 0$ و $z = +l$ قرار گرفته‌اند. پتانسیل این سیستم را بر حسب چندجمله‌های‌های لژاندر بنویسید.

پاسخ ۷:

$$\Phi = \frac{ql^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{ql^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}P_2(\cos\theta)$$

مسئله‌ی ۸:

با استفاده از فرمول رودریگز، چند جمله‌ای‌های لژاندر $P1$ و P_2 و P_3 را به دست آورید.
با انتگرال‌گیری مستقیم نشان دهید که $P1$ و P_3 متعامدند.

پاسخ ۸:

مسئله‌ی ۹:

الف) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک حلقه‌ی باردار به شعاع R و بار یکنواخت Q، که در صفحه‌ی xyقرار دارد و مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق است، بر روی محور z محاسبه کنید.

ب) پتانسیل ناشی از این حلقه را در نقطه‌ای دلخواه (خارج از محور z) محاسبه کنید.

پاسخ ۹: الف)

$$\Phi(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

ب)

$$\Phi(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{R^{2n}}{r^{2n+1}}P_{2n}(\cos\theta) & r \geq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{r^{2n}}{R^{2n+1}}P_{2n}(\cos\theta) & r \leq R \end{cases}$$