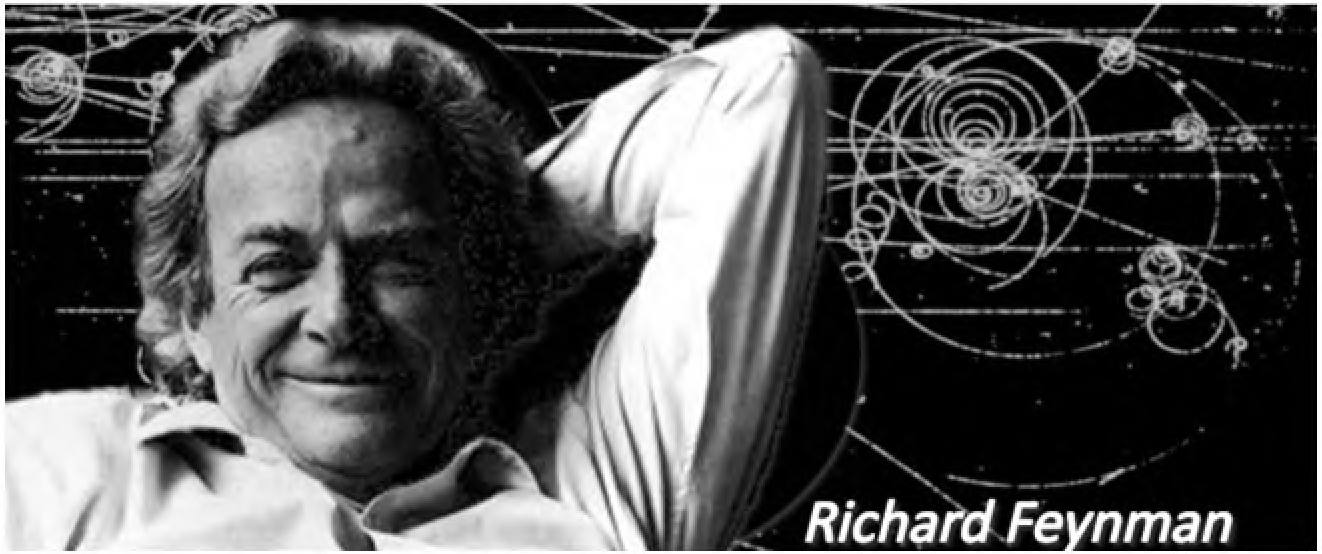
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را
به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

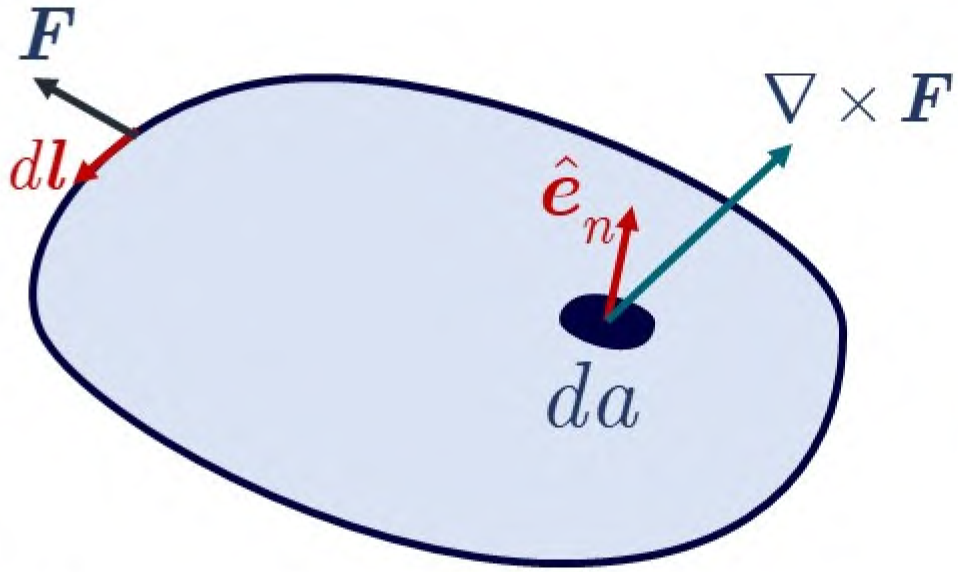
درس دهم

قضیه‌ی استوکس

Stokes' Theorem

دانشگاه خوارزمی

انتگرال خطی یک میدان برداری **حول یک منحنی بسته** برابر است با **انتگرال سطحی مؤلفه‌ی قائمِ تاوِ** آن بردار روی **سطحی** که توسط این منحنی محصور شده است.



$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_A \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_n da$$

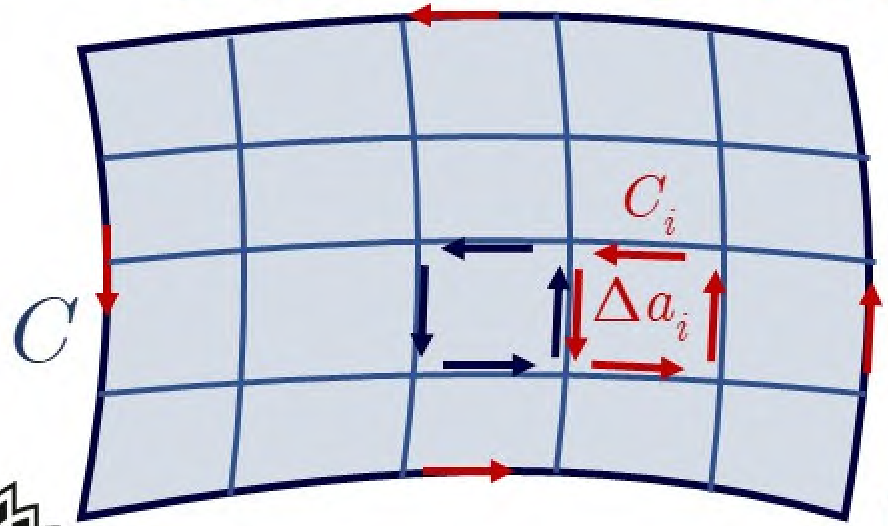
اثبات: اگر سطح کوچک باشد، حکم قضیه طبق تعریف تاو برقرار است

$$\int_{\Delta a} \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_n da \approx \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_n \Delta a$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_n = \frac{\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta a}$$

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_A \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_n da$$

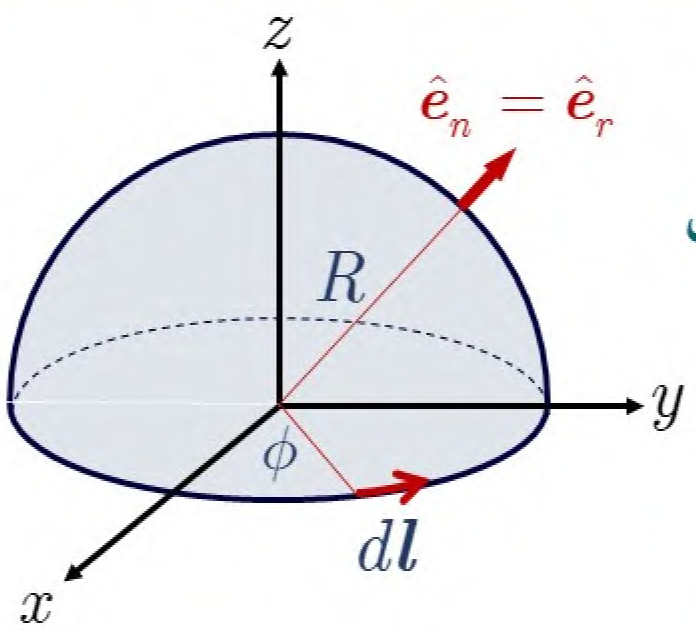
اگر سطح کوچک نباشد، آن را به عناصر سطحی کوچک تقسیم می‌کنیم و برای هر سطح تعریف تاو را می‌نویسیم



$$\nabla \times \boldsymbol{F}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{n_i} = \frac{\oint_{C_i} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta a_i}$$

$$\sum_i \nabla \times \boldsymbol{F}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{n_i} \Delta a_i = \sum_i \oint_{C_i} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\int_A \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_n da = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$



میدان برداری زیر را در نظر بگیرید

$$\boldsymbol{F} = (2x - y)\hat{\boldsymbol{e}}_x - yz^2\hat{\boldsymbol{e}}_y - y^2 z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

درستی قضیه‌ی استوکس را برای این میدان برداری بر روی سطح نیم‌کره‌ای که با معادله‌ی زیر مشخص می‌شود، بررسی کنید

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,; \qquad z > 0$$

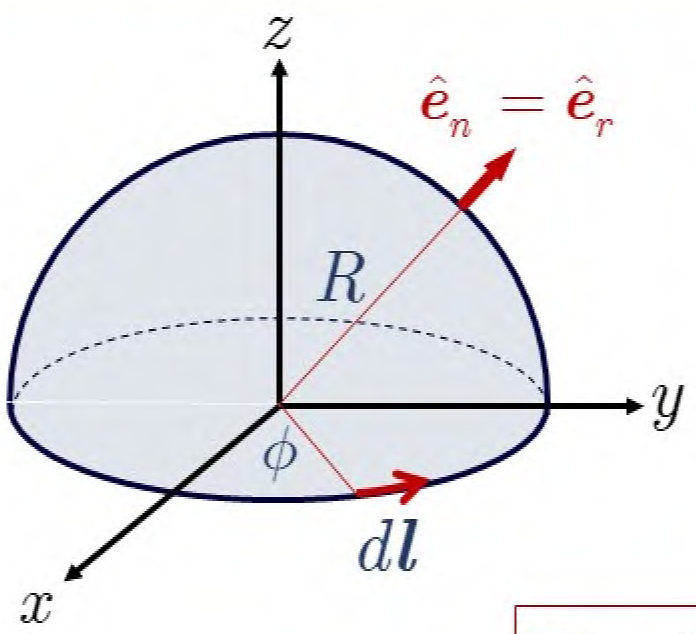
$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = ?$$

$$d\boldsymbol{l} = R\,d\phi\,\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = R(2x - y)\hat{\boldsymbol{e}}_x\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\phi d\phi - \underbrace{\cancel{Ryz^2\hat{\boldsymbol{e}}_y\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\phi d\phi}}_{0} - \underbrace{\cancel{Ry^2 z\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\phi d\phi}}_{0}$$

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = R^2(2\cos\phi - \sin\phi)(-\sin\phi)d\phi$$

$$\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = R^2\int_0^{2\pi}(2\cos\phi - \sin\phi)(-\sin\phi)d\phi = \pi R^2$$



$$\boldsymbol{F} = (2x - y)\hat{\boldsymbol{e}}_x - yz^2\hat{\boldsymbol{e}}_y - y^2z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\int_A \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = ?$$

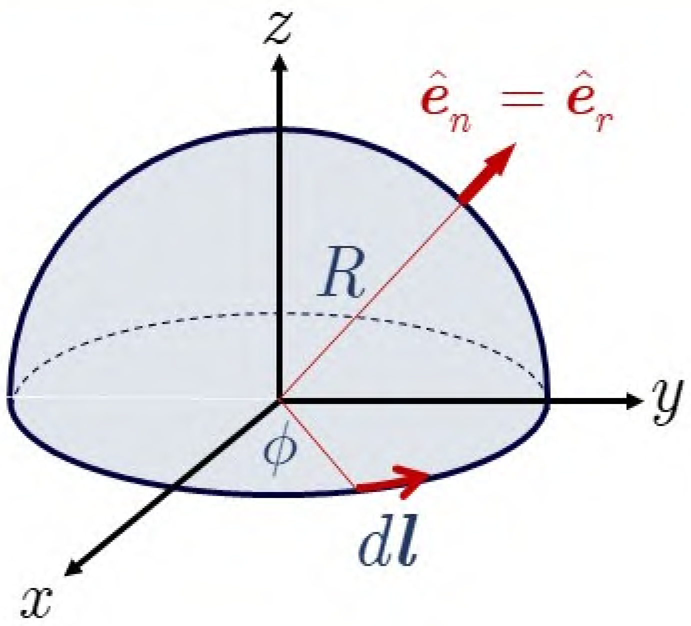
$$d\boldsymbol{a} = R^2 \sin\theta d\theta d\phi \boldsymbol{e}_r$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{e}_x\left(2yz - 2yz\right) + \boldsymbol{e}_y\left(0 - 0\right) + \boldsymbol{e}_z\left(0 + 1\right) = \boldsymbol{e}_z$$

$$\int_A \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta d\phi \hat{\boldsymbol{e}}_z \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r = R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta d\phi \cos\theta$$

$$\int_A \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = \pi R^2$$



$$\boldsymbol{F} = (2x - y)\hat{\boldsymbol{e}}_x - yz^2\hat{\boldsymbol{e}}_y - y^2z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\int_A \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = \pi R^2$$

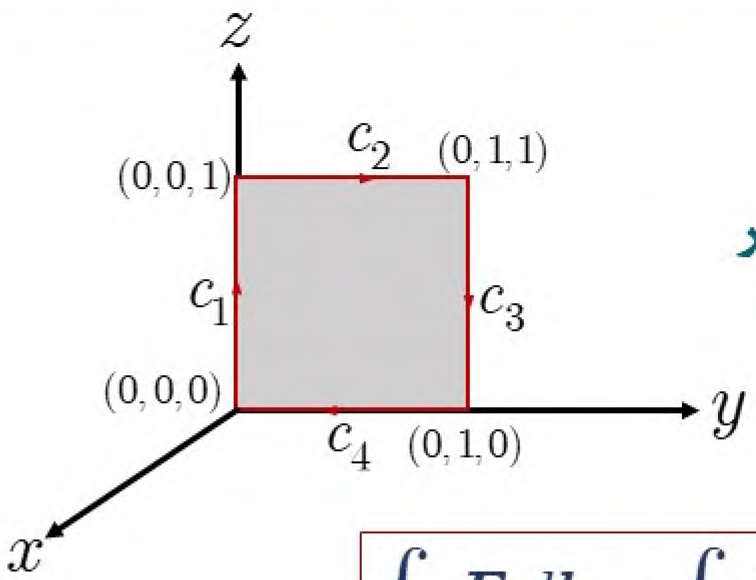
$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \pi R^2$$

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_A \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a}$$

میدان برداری زیر را در نظر بگیرید

$$\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{e}}_x + y^2 z \hat{\boldsymbol{e}}_y$$

درستی قضیه‌ی استوکس را برای این میدان برداری بر روی سطح مربع نشان داده شده در شکل، بررسی کنید.

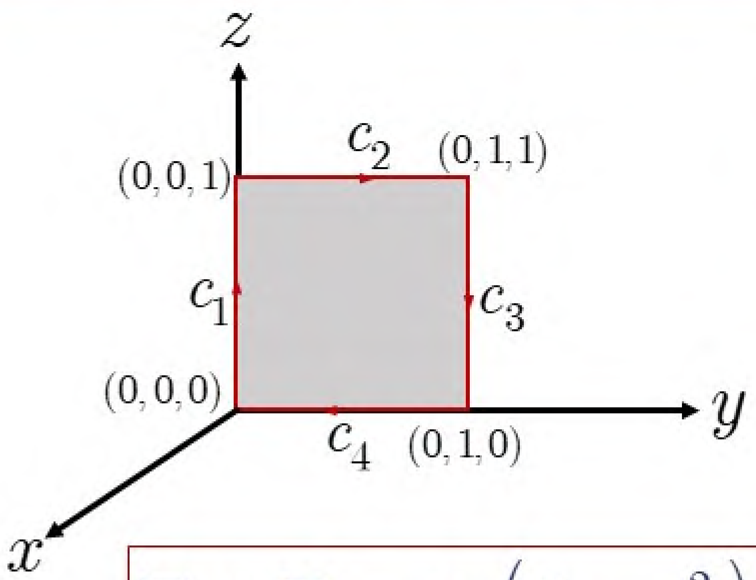


$$\oint_C \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{l} = \int_{c_1} \boldsymbol{F}.\hat{\boldsymbol{e}}_z dz + \int_{c_2} \boldsymbol{F}.\hat{\boldsymbol{e}}_y dy + \int_{c_3} \boldsymbol{F}.(-\hat{\boldsymbol{e}}_z) dz + \int_{c_4} \boldsymbol{F}.(-\hat{\boldsymbol{e}}_y) dy$$

$$\oint_C \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{l} = 0 + \int_{(0,0,1)}^{(0,1,1)} y^2 z dy + 0 - \int_{(0,1,0)}^{(0,0,0)} y^2 z dy = 0 + \frac{1}{3} + 0 - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\oint_C \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{l} = \frac{1}{3}}$$

دانشگاه خوارزمی



$$\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{e}}_x + y^2 z \hat{\boldsymbol{e}}_y$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{e}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \boldsymbol{e}_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \boldsymbol{e}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{e}_x \left(0 - y^2 \right) + \boldsymbol{e}_y \left(0 - 0 \right) + \boldsymbol{e}_z \left(0 - 0 \right) = -y^2 \boldsymbol{e}_x$$

$$d\boldsymbol{a} = dydz(-\hat{\boldsymbol{e}}_x)$$

$$\int_A \nabla \times \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{a} = \int_0^1 \int_0^1 y^2 dydx = \frac{1}{3}$$

$$\oint_C \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{l} = \frac{1}{3}$$

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی