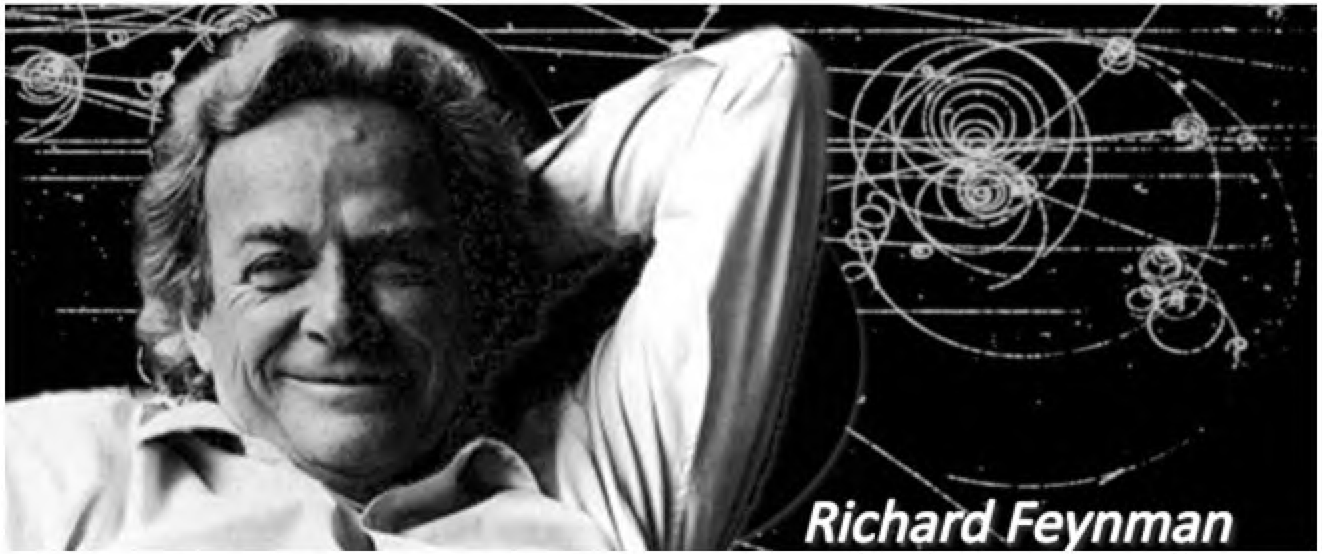
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

دانشگاه خوارزمی

درس یازدهم

دسته‌بندی میدان‌های برداری

Classification of Vector Fields

دانشگاه خوارزمی

دیدیم که گرادیان یک میدان اسکالر، میدانی برداری است:

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \nabla f}$$

می‌توان واگرایی این میدان برداری را محاسبه کرد

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \nabla \cdot (\nabla f)}$$

عمل‌گر لاپلاس را به شکل زیر معرفی می کنیم:

$$\boxed{\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla}$$

$$\boxed{\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \nabla f = \hat{\boldsymbol{e}}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{e}}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{\partial f}{\partial z}}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

بنابر این شکل عمل‌گر لاپلاس در دستگاه مختصات کارتزین به صورت زیر است

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

عمل‌گر لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\boxed{\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

عمل‌گر لاپلاس در دستگاه مختصات کروی

$$\boxed{\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}}$$

لاپلاسی یک میدان برداری بر اساس اتحاد برداری زیر تعریف می‌شود

$$\boxed{\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{F} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \boldsymbol{F} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F})}$$

در دستگاه مختصات کارتزین می‌توان نوشت

$$\boxed{\nabla^2 \boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{e}}_x \nabla^2 F_x + \hat{\boldsymbol{e}}_y \nabla^2 F_y + \hat{\boldsymbol{e}}_z \nabla^2 F_z}$$

در دستگاه‌های مختصات دیگر رابطه‌ای مشابه با مختصات کارتزین برقرار نیست و مناسب‌تر است که از اتحاد برداری بالا در این دستگاه‌های مختصات استفاده شود

$$\boxed{\nabla^2 \boldsymbol{F} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F})}$$

دانشگاه خوارزمی

قضیه‌ی هلمهولتز بیان می‌کند که هرگاه هم **تاو** و هم **واگرایی** یک میدان برداری

معلوم باشد، می‌توان آن میدان را تا حد یک ثابت افزودنی تعیین کرد.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r})$$
$$\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\Phi(\boldsymbol{r}) + \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f(\boldsymbol{r}')}{|\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\ |}dv'$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\ |}dv'$$

جزئیات بحث را در پیوست ب کتاب الکترودینامیک گریفیتث ببینید

دانشگاه خوارزمی

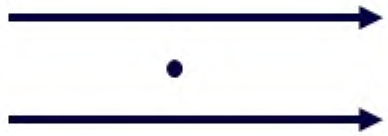
میدان سلونوئیدی: میدانی که واگرایی آن صفر است (میدان بدون واگرایی)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = 0 \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$$

میدان غیرچرخشی: میدانی که چرخش آن صفر است (میدان دارای پتانسیل- **میدان پایستار**)

$$\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla \Psi(\boldsymbol{r})$$

دانشگاه خوارزمی



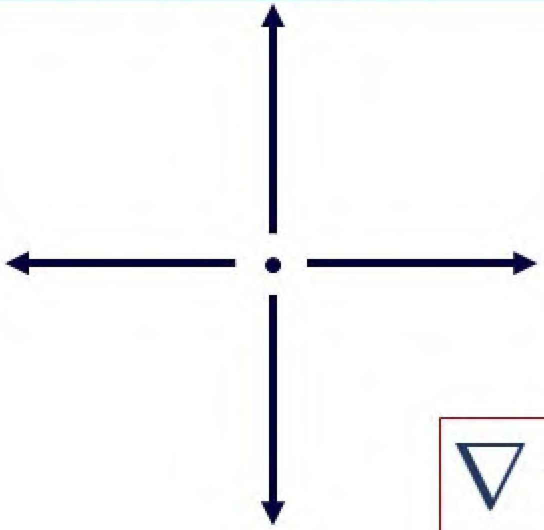
۱ - میدان سلونوئیدی و غیر چرخشی:

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla \Psi(\boldsymbol{r})}$$

$$\nabla \cdot \nabla \Psi(\boldsymbol{r}) = \nabla^2 \Psi(\boldsymbol{r}) = 0$$



۲ - میدان غیر سلونوئیدی و غیر چرخشی:

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0}$$

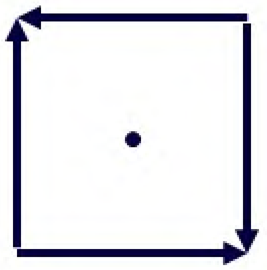
$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \neq 0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla \Psi(\boldsymbol{r})}$$

$$\nabla^2 \Psi(\boldsymbol{r}) \neq 0$$

دانشگاه خوارزمی

۳- میدان سلونوئیدی و چرخشی:



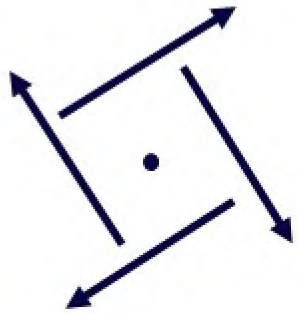
$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \neq 0}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})}$$

$$\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) - \nabla^2 \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \neq 0$$

۳- میدان غیر سلونوئیدی و چرخشی:



$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \neq 0} \qquad \boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \neq 0}$$

چنین میدانی را می‌توان متشکل از دو بخش در نظر گرفت، یکی سلونوئیدی و دیگری غیر چرخشی

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_s$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}_i = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F}_s = 0$$

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی