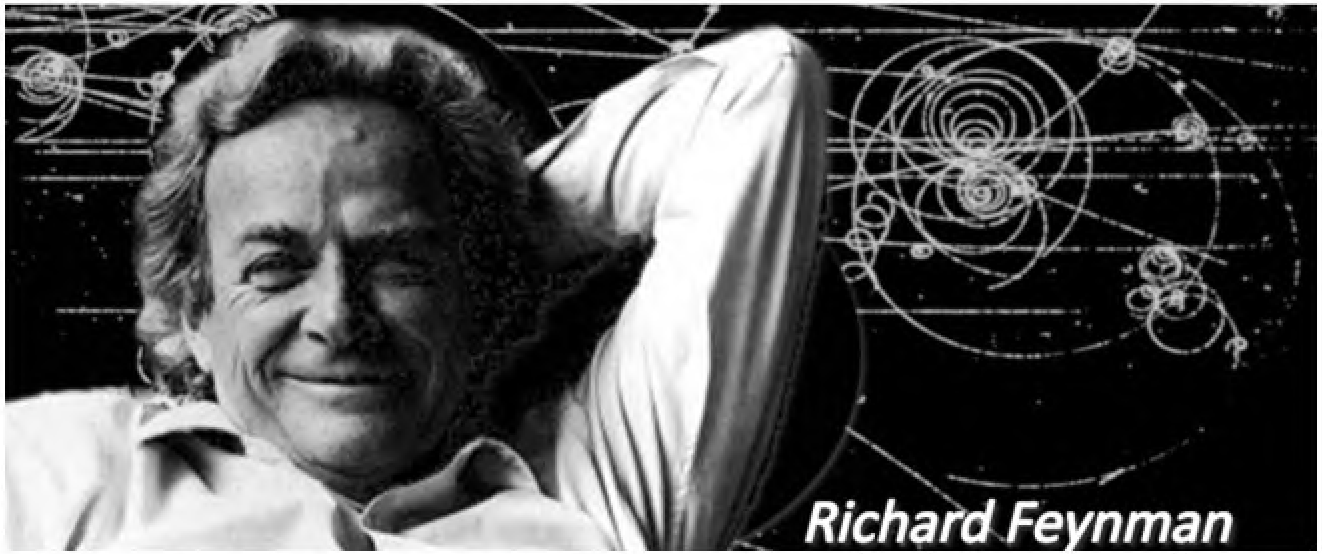
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را
به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس دوازدهم

روابط انتگرالی برداری

Vector Integral Relations

دانشگاه خوارزمی

اتحاد اول گرین

اگر Φ و Ψ دو میدان اسکالر دلخواه باشند، آن‌گاه

$$\boxed{\int_V \Big(\Psi\nabla^2\Phi + \nabla\Phi\cdot\nabla\Psi\Big)dv = \oint_A \Psi\nabla\Phi\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da = \oint_A \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}da}$$

اثبات در قضیه‌ی واگرایی $\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}dv = \oint_A \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da$ به جای میدان برداری $\boldsymbol{F}$ قرار دهیم: $\boldsymbol{F} = \Psi\nabla\Phi$

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \Psi\nabla^2\Phi + \nabla\Psi\cdot\nabla\Phi} \qquad \boxed{\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da = \Psi\nabla\Phi\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da = \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}da}$$

آن گاه **اتحاد اول گرین** به دست می‌آید:

$$\boxed{\int_V \Big(\Psi\nabla^2\Phi + \nabla\Phi\cdot\nabla\Psi\Big)dv = \oint_A \Psi\nabla\Phi\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da = \oint_A \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}da}$$

دانشگاه خوارزمی

اتحاد دوم گرین اگر Φ و Ψ دو میدان اسکالر دلخواه باشند، آن‌گاه

$$\int_V \left(\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi \right) dv = \oint_A \left(\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) da$$

اثبات در قضیه‌ی واگرایی $\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} dv = \oint_A \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da$ به جای میدان برداری $\boldsymbol{F}$ قرار دهیم:

$$\boldsymbol{F} = \Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \Psi \nabla \Phi \cdot \hat{\boldsymbol{n}} - \Phi \nabla \Psi \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n}}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi - \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi = \Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi}$$

آن گاه **اتحاد دوم (یا قضیه‌ی) گرین** به دست می‌آید:

$$\boxed{\int_V \left(\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi \right) dv = \oint_A \left(\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi \right) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da = \oint_A \left(\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) da}$$

دانشگاه خوارزمی

چند قضیه‌ی انتگرالی

$$(1) \quad \int_V \nabla\Phi dv = \oint_A \Phi\hat{\boldsymbol{n}}da$$

$$(2) \quad \int_A \hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla\Phi da = \oint_C \Phi d\boldsymbol{l}$$

$$(3) \quad \int_V \nabla \times \boldsymbol{F} dv = \oint_A \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{F} da$$

$$(4) \quad \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{G} + \boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} dv = \oint_s \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) da$$

دانشگاه خوارزمی

اثبات قضیه‌ی (۱):

$$\int_V \nabla\Phi dv = \oint_A \Phi\hat{\boldsymbol{n}}da$$

اگر در قضیه‌ی واگرایی $\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}dv = \oint_A \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da$ به جای میدان برداری قرار دهیم:

$$\boldsymbol{F} = \Phi\boldsymbol{B}$$

که $\boldsymbol{B}$ برداری ثابت دلخواه است.

$$\int_V \nabla\cdot\left(\Phi\boldsymbol{B}\right)dv = \oint_A \Phi\boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da$$

$$\nabla\cdot\left(\Phi\boldsymbol{B}\right) = \nabla\Phi\cdot\boldsymbol{B} + \cancelto{0}{\Phi\nabla\cdot\boldsymbol{B}} = \nabla\Phi\cdot\boldsymbol{B}$$

$$\int_V \nabla\Phi\cdot\boldsymbol{B}dv = \oint_A \Phi\boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\int_V \nabla\Phi dv = \boldsymbol{B}\cdot\oint_A \Phi\hat{\boldsymbol{n}}da$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\left(\int_V \nabla\Phi dv - \oint_A \Phi\hat{\boldsymbol{n}}da\right) = 0$$

$$\int_V \nabla\Phi dv = \oint_A \Phi\hat{\boldsymbol{n}}da$$

اثبات قضیه‌ی (۲): $$\int_A \hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla\Phi \, da = \oint_C \Phi \, d\boldsymbol{l}$$

در قضیه‌ی استوکس $\int_V (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$ قرار دهیم: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}\Phi$ که در آن $\boldsymbol{B}$ بردار ثابتی است.

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times (\boldsymbol{B}\Phi) = (\nabla\Phi) \times \boldsymbol{B} + \Phi\overset{0}{(\nabla \times \boldsymbol{B})}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \Phi \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}}$$

$$\boxed{\int_V \left[(\nabla\Phi) \times \boldsymbol{B}\right] \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da = \oint_C \Phi \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}}$$

اما $$\boxed{\left[(\nabla\Phi) \times \boldsymbol{B}\right] \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{B} \cdot \left[\hat{\boldsymbol{n}} \times (\nabla\Phi)\right]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{B} \cdot \int_V \left[\hat{\boldsymbol{n}} \times (\nabla\Phi)\right] da = \boldsymbol{B} \cdot \oint_C \Phi d\boldsymbol{l}}$$

$$\boxed{\int_V \left[\hat{\boldsymbol{n}} \times (\nabla\Phi)\right] da = \oint_C \Phi d\boldsymbol{l}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\int_V \nabla \times \boldsymbol{F} dv = \oint_A \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{F} da$$

اثبات قضیه‌ی (۳):

اگر در قضیه‌ی واگرایی $\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} dv = \oint_A \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da$ قرار دهیم: $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{B}$ که $\boldsymbol{B}$ بردار ثابتی است.

$$\boxed{\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{B}) = (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{B} - \overbrace{(\nabla \times \boldsymbol{B})}^{0} \cdot \boldsymbol{F}}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{B}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{B} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{F})}$$

$$\boxed{\int_V (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{B} dv = \oint_A \boldsymbol{B} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{F}) da}$$

$$\boxed{\boldsymbol{B} \cdot \int_V (\nabla \times \boldsymbol{F}) dv = \boldsymbol{B} \cdot \oint_A (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{F}) da}$$

$$\boxed{\boldsymbol{B} \cdot \int_V (\nabla \times \boldsymbol{F}) dv = \boldsymbol{B} \cdot \oint_A (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{F}) da}$$

$$\boxed{\int_V (\nabla \times \boldsymbol{F}) dv = \oint_A (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{F}) da}$$

اثبات قضیه‌ی (۴):

$$\int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{G}+\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F}dv=\oint_s \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})da$$

ابتدا مسئله را برای مؤلفه‌ی x بررسی می‌کنیم $\int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{G}+\boldsymbol{G}\cdot\nabla)F_x dv=\ ?$

اگر در قضیه‌ی واگرایی $\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}dv=\oint_A \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da$ قرار دهیم: $\boldsymbol{F}\ \to\ F_x\boldsymbol{G}$

$$\boxed{\nabla\cdot(F_x\boldsymbol{G})=F_x\nabla\cdot\boldsymbol{G}+(\nabla F_x)\cdot\boldsymbol{G}}$$

$$\boxed{\int_V \nabla\cdot(F_x\boldsymbol{G})dv=\oint_A (F_x\boldsymbol{G})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da}\quad \boxed{\int_V \Big[F_x\nabla\cdot\boldsymbol{G}+(\nabla F_x)\cdot\boldsymbol{G}\Big]dv=\oint_A (F_x\boldsymbol{G})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da}$$

$$\boxed{\int_V \Big[\nabla\cdot\boldsymbol{G}+\boldsymbol{G}\cdot\nabla\Big]F_x dv=\oint_A F_x\boldsymbol{G}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\int_V \left[\nabla\cdot\boldsymbol{G} + \boldsymbol{G}\cdot\nabla\right] F_x dv = \oint_A F_x \boldsymbol{G}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} da$$

$$\int_V \left[\nabla\cdot\boldsymbol{G} + \boldsymbol{G}\cdot\nabla\right] F_y dv = \oint_A F_y \boldsymbol{G}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} da$$

$$\int_V \left[\nabla\cdot\boldsymbol{G} + \boldsymbol{G}\cdot\nabla\right] F_z dv = \oint_A F_z \boldsymbol{G}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} da$$

$$\boxed{\int_V \left[\nabla\cdot\boldsymbol{G} + \boldsymbol{G}\cdot\nabla\right] \boldsymbol{F} dv = \oint_A \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} da}$$

شاد و مهربان باشید