

Electromagnetism I

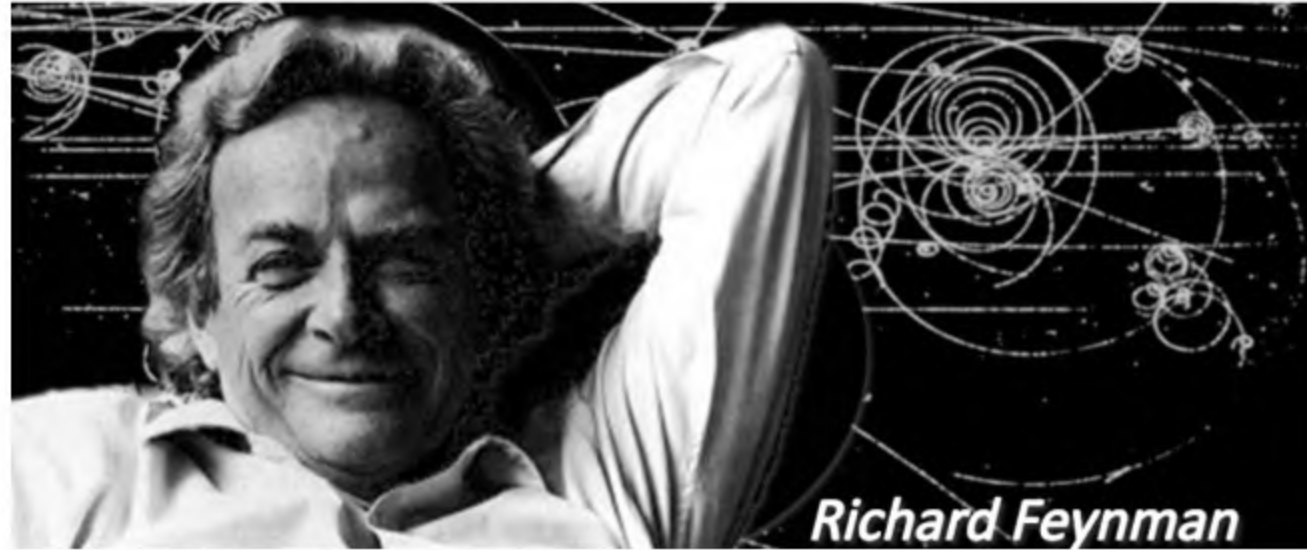
Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی





اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را
به دست می آورید که تا کنون کسب کرده اید

فاینمن

درس چهاردهم

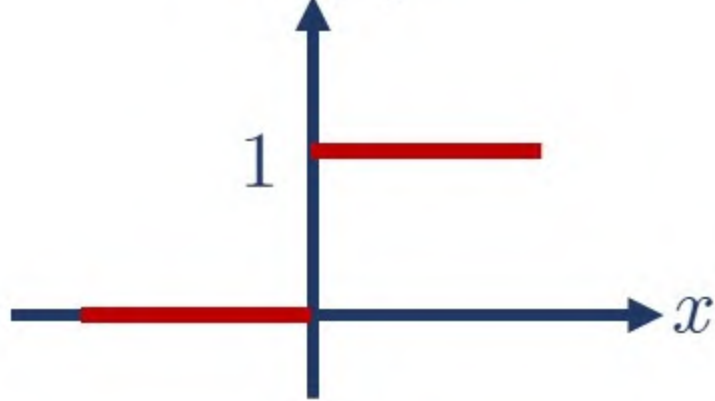
تابع دلتای دیراک

Dirac Delta Function



$\Theta(x)$

1



تابع هوی ساید (Heaviside) یا تابع پله‌ای به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

این تابع با نماد $H(x)$ نیز نمایش داده می‌شود.

مشتق این تابع برای همه‌ی نقاط $x \neq 0$ برابر با صفر است. در نقطه‌ی $x=0$ مشتق این تابع تعریف نشده است.

$$\delta(x) = \frac{d\Theta(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

مشتق تابع هوی ساید را با نماد $\delta(x)$ نشان می‌دهیم و تابع دلتای دیراک می‌نامیم.



$$\delta(x) = \frac{d\Theta(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

تابع دلتا همه جا صفر است مگر در $x=0$

اما انتگرال این تابع روی ناحیه‌ای که نقطه‌ی $x=0$ را در برگیرد، برابر با 1 می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x) dx = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{d\Theta(x)}{dx} dx = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} d\Theta(x) = \Theta(\epsilon) - \Theta(-\epsilon) = 1$$

در واقع می‌توان گفت که تابع $\delta(x)$ حول نقطه‌ی $x = 0$ قله‌ای است و سطح زیر منحنی آن برابر با 1 است.

واضح است که تابع $\delta(x - a)$ حول نقطه‌ی $x = a$ قله‌ای است. می‌توان نوشت:

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ \infty & x = a \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) dx = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(x - a) dx = 1$$

دیمانسیون تابع دلتا وارون طول است: L^{-1}



فرض کنید تابع $f(x)$ تابعی پیوسته باشد که مقدار آن در بی نهایت صفر است.

انتگرال زیر را در نظر بگیرید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx$$

$$\begin{aligned} f(x) = u &\rightarrow du = f'(x)dx \\ \delta(x)dx = dv &\rightarrow v = \Theta(x) \end{aligned}$$

این انتگرال را به روش جزء به جزء حل می کنیم

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx &= f(x)\Theta(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\Theta(x)dx \\ &= 0 - \int_0^{+\infty} f'(x)dx \\ &= 0 - f(x)\Big|_0^{+\infty} \\ &= 0 - [f(\infty) - f(0)] \\ &= f(0) \end{aligned}$$



در این جا فرض کردیم که تابع $f(x)$ در بی نهایت صفر باشد تا بتوانیم از روش جزء به جزء استفاده کنیم. اما از آن جا که $\delta(x)$ همه جا غیر از $x=0$ برابر با صفر است، بنابر این انتگرال فوق در $x=0$ مخالف صفر است. پس رفتار $f(x)$ در بی نهایت نباید نقشی در مقدار انتگرال داشته باشد. بنابر این برای هر تابع پوسته ای می توان نوشت:

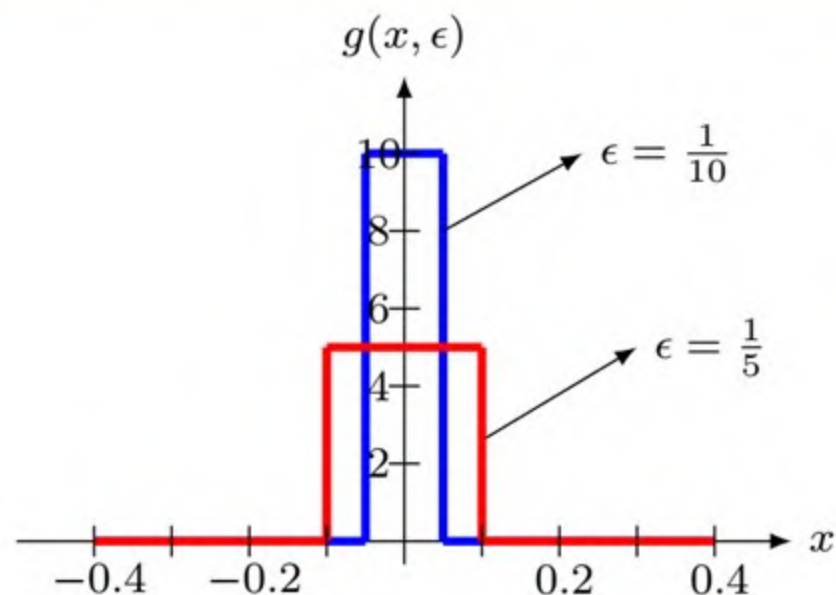
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

به راحتی دیده می شود که تابع هوی ساید را می توان به شکل زیر نوشت

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t)dt$$





$$g(x, \epsilon) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1}{\epsilon} & |x| < \frac{\epsilon}{2} \end{cases} = \frac{1}{\epsilon} \Theta\left(\frac{\epsilon}{2} - |x|\right)$$

تابع زیر را در نظر بگیرید:

تابع دلتای دیراک را می‌توان به صورت حد این تابع وقتی که $\epsilon \rightarrow 0$ نوشت

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(x, \epsilon) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, \epsilon) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon/2}^{+\epsilon/2} \frac{1}{\epsilon} dx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right) = 1$$

همچنین اگر تابعی مانند $f(x)$ داشته باشیم که پیوسته باشد، و $F'(x) = f(x)$ باشد، آن‌گاه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x, \epsilon) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{+\epsilon/2} f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [F(\epsilon/2) - F(-\epsilon/2)] = F'(0) = f(0)$$

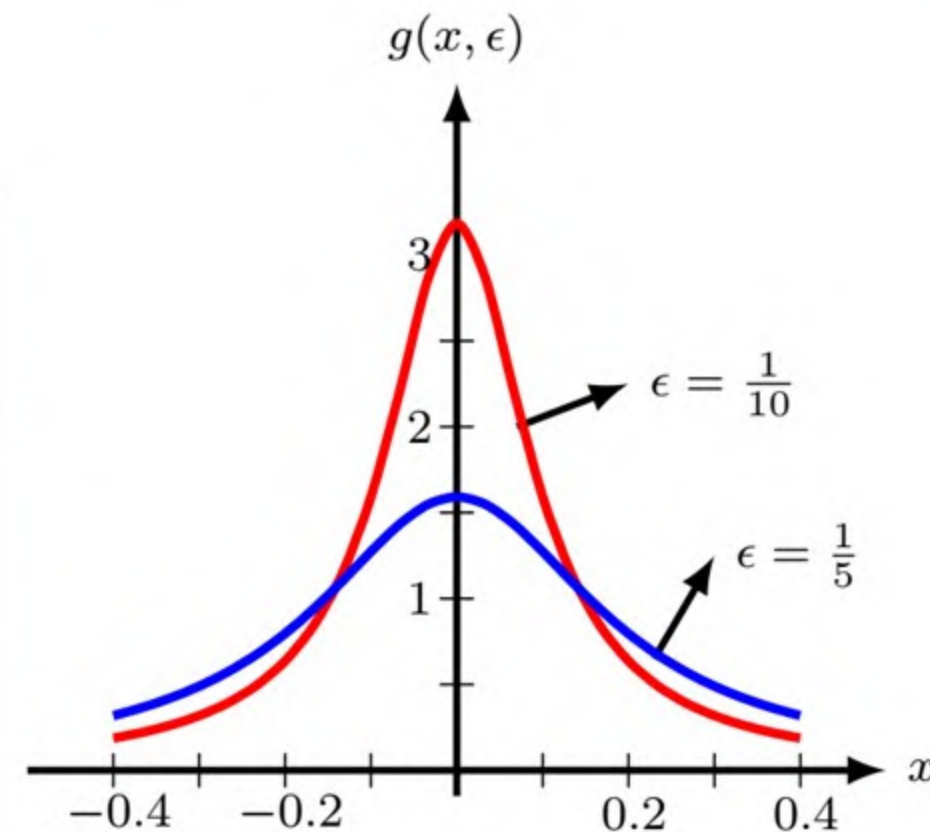


$$g(x, \epsilon) = \frac{\epsilon / \pi}{x^2 + \epsilon^2}$$

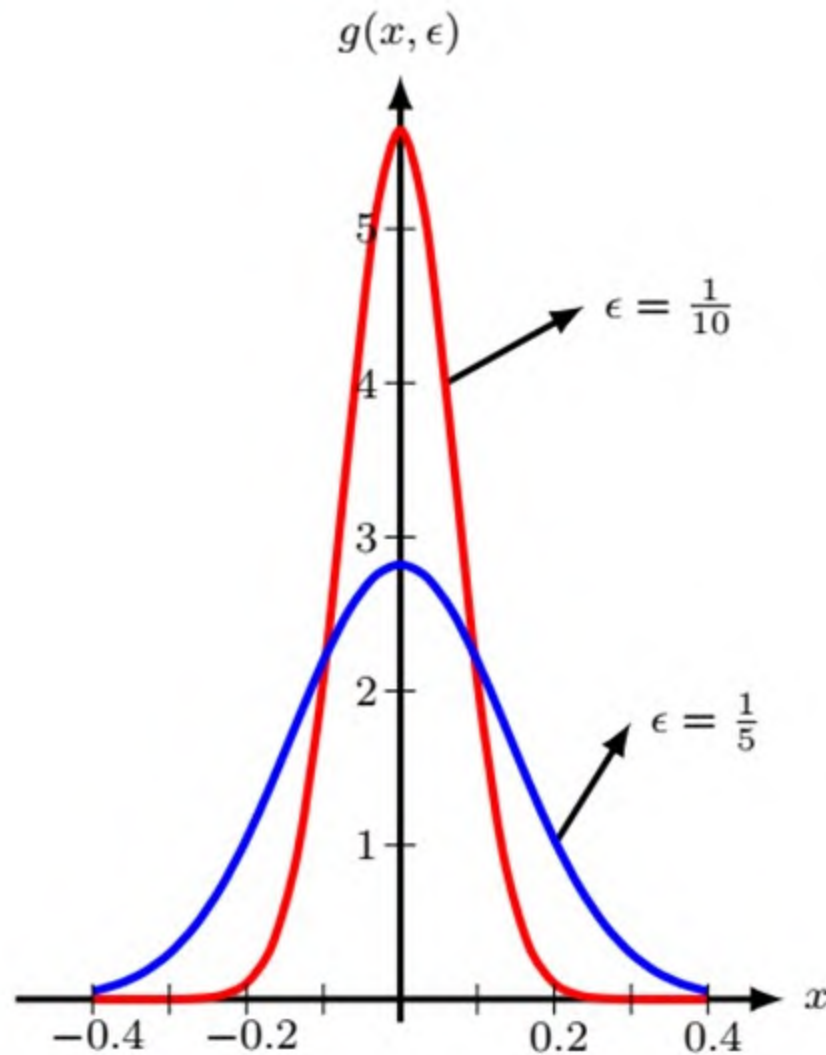
نمایش لورنتزی (Lorentzian)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(x, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon / \pi}{x^2 + \epsilon^2} = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, \epsilon) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon / \pi}{x^2 + \epsilon^2} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2 + 1} dy; \quad (y = x / \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(y) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} (\pi) \\ &= 1 \end{aligned}$$



نمایش گوسی (Gaussian)



$$g(x, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon^2}}$$

همچنین تابع دلتا را می‌توان به صورت حدهای زیر نیز نشان داد

$$\begin{aligned}
 \delta(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} |x|^{\epsilon-1} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \text{Ai}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} J_{1/\epsilon}\left(\frac{x+1}{\epsilon}\right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} L_n\left(\frac{2x}{\epsilon}\right)
 \end{aligned}$$

در رابطه‌ی فوق Ai تابع آیری، J_n تابع بسل نوع اول و L_n چند جمله‌ای لاگراست



$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-a)} dk \quad \text{نمایش فوری‌ی تابع دلتا به شکل زیر است}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-a)} dk &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\infty} e^{ik(x-a+i\epsilon)} dk + \int_{-\infty}^0 e^{ik(x-a-i\epsilon)} dk \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{i}{(x-a) + i\epsilon} - \frac{i}{(x-a) - i\epsilon} \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{2\epsilon}{(x-a)^2 - \epsilon^2} \right\} \\ &= 2\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\epsilon / \pi}{(x-a)^2 - \epsilon^2} \right\} \\ &= 2\pi \delta(x-a) \end{aligned}$$



$$\delta(x) = \delta(-x)$$

$$\delta(x - a) = \delta(a - x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x) \delta(x - a) dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(a) \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(x - a) dx \\ &= f(a) \end{aligned}$$

$$f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x)$$

$$x \delta(x) = 0$$



در سه بُعد، تابع دلتای دیراک به شکل زیر تعریف می شود:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \end{cases}$$

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = 1, \quad (\mathbf{r}_0 \in V)$$

در حالت سه بُعدی دیمانسیون تابع دلتا وارون حجم است: L^{-3}

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = f(\mathbf{r}_0), \quad (\mathbf{r}_0 \in V)$$

نمایش فوری تابع دلتا در حالت سه بُعدی به شکل زیر است:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{ik \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}$$

بدیهی است که در حالت دو بُعدی در تعریف تابع دلتا انتگرال گیری بر روی سطح است:

$$\int_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) da = 1, \quad (\mathbf{r}_0 \in A)$$



عنصر حجم در دستگاه مختصات کارتزین به شکل $dv = dx dy dz$ است. بنابر این

$$\int f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = \int dx \int dy \int dz f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}_0)$$

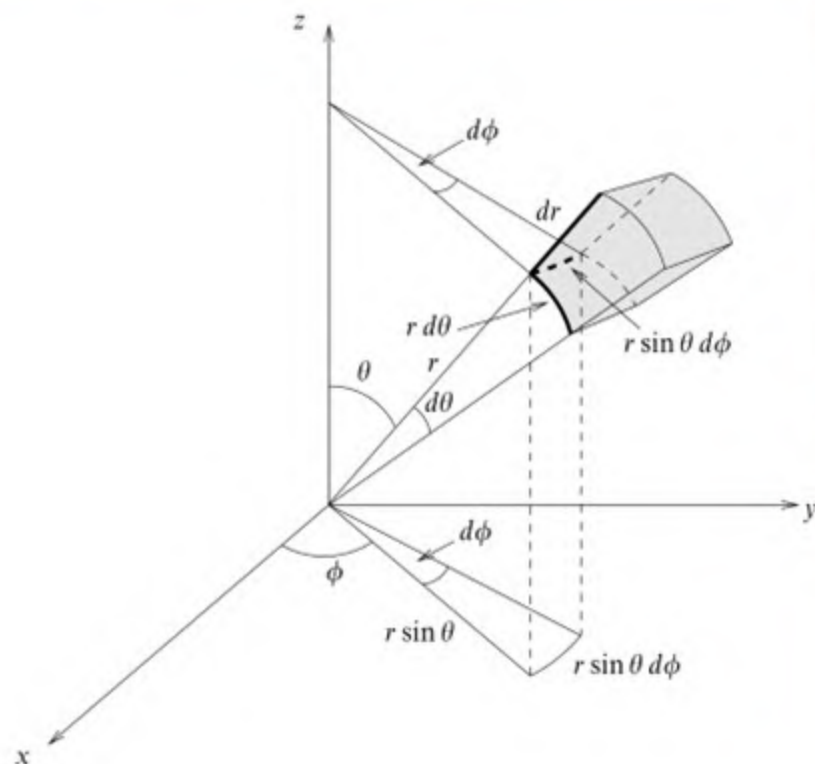
این رابطه نشان می‌دهد که برای نوشتن تابع دلتای دیراک در مختصات کارتزین کافی است آن را به صورت حاصل ضرب سه تابع دلتای یک بُعدی بنویسیم:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$

به طور کاملاً مشابه می‌توان دید که در حالت دو بُعدی تابع دلتا در مختصات کارتزین به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (\mathbf{r} = (x, y))$$





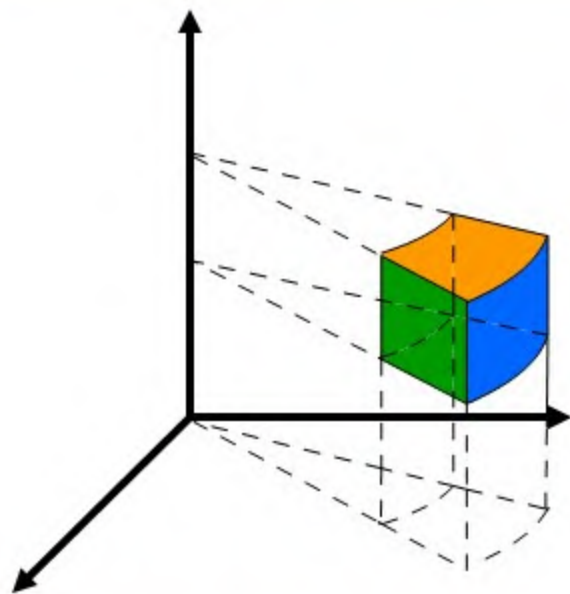
$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$dv = r^2 dr d(\cos \theta) d\phi$$

$$dv = r^2 dr d\Omega$$

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \frac{\delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0)}{r^2 \sin \theta} \\ &= \frac{\delta(r - r_0) \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) \delta(\phi - \phi_0)}{r^2} \\ &= \frac{\delta(r - r_0) \delta(\Omega - \Omega_0)}{r^2} \end{aligned}$$

واضح است که در روابط فوق به جای r^2 می‌توان r_0^2 و یا $r r_0$ قرار داد.



$$dv = \rho d\rho d\phi dz$$

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \frac{\delta(\rho - \rho_0)\delta(\phi - \phi_0)\delta(z - z_0)}{\rho} \\ &= \frac{\delta(\rho - \rho_0)\delta(\phi - \phi_0)\delta(z - z_0)}{\rho_0} \end{aligned}$$

شاد و مهربان باشید

