

# Electromagnetism I

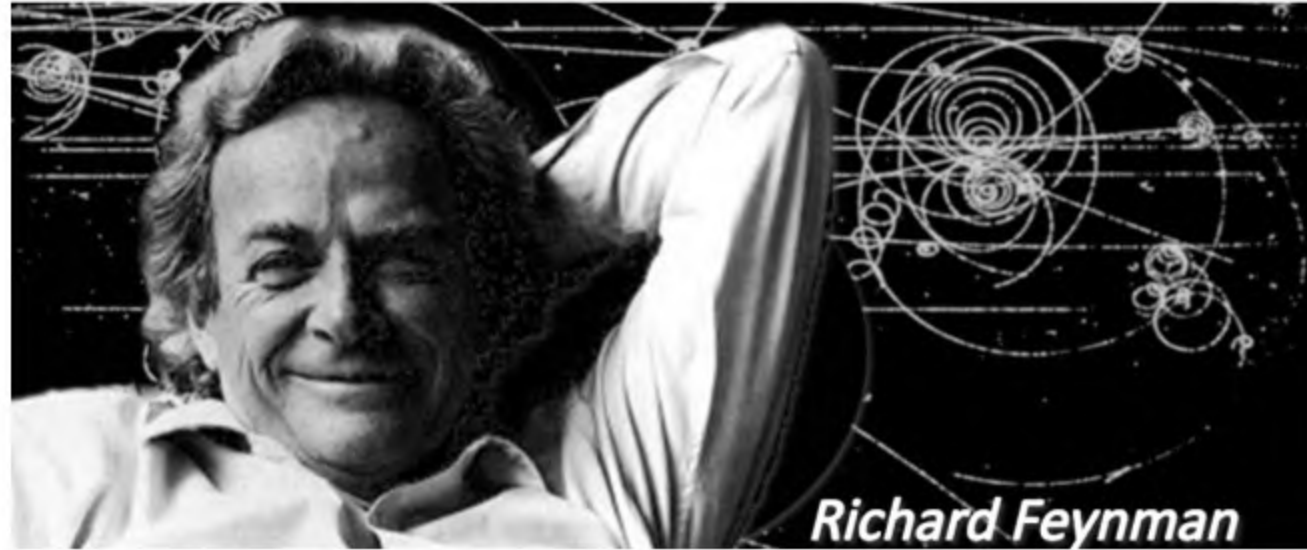
Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی





اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را  
به دست می آورید که تا کنون کسب کرده اید

فاینمن

---

درس شانزدهم

میدان الکتریکی

Electric Field



$$\oplus \quad m \mathbf{a} = \mathbf{F}_q$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_q) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_q}{q}$$

میدان الکتریکی یک میدان برداری است.

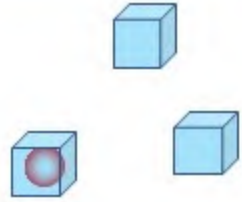




میدان الکتریکی ناشی از مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای، چگالی خطی، چگالی سطحی و چگالی حجمی بار الکتریکی

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dv' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int da' \sigma(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dl' \lambda(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \end{aligned}$$





با استفاده از تابع دلتای دیراک می‌توان برای یک بار نقطه‌ای، واقع در نقطه‌ی  $r_0$  چگالی حجمی بار الکتریکی به صورت زیر تعریف کرد:

$$\rho(r) = q\delta(r - r_0)$$

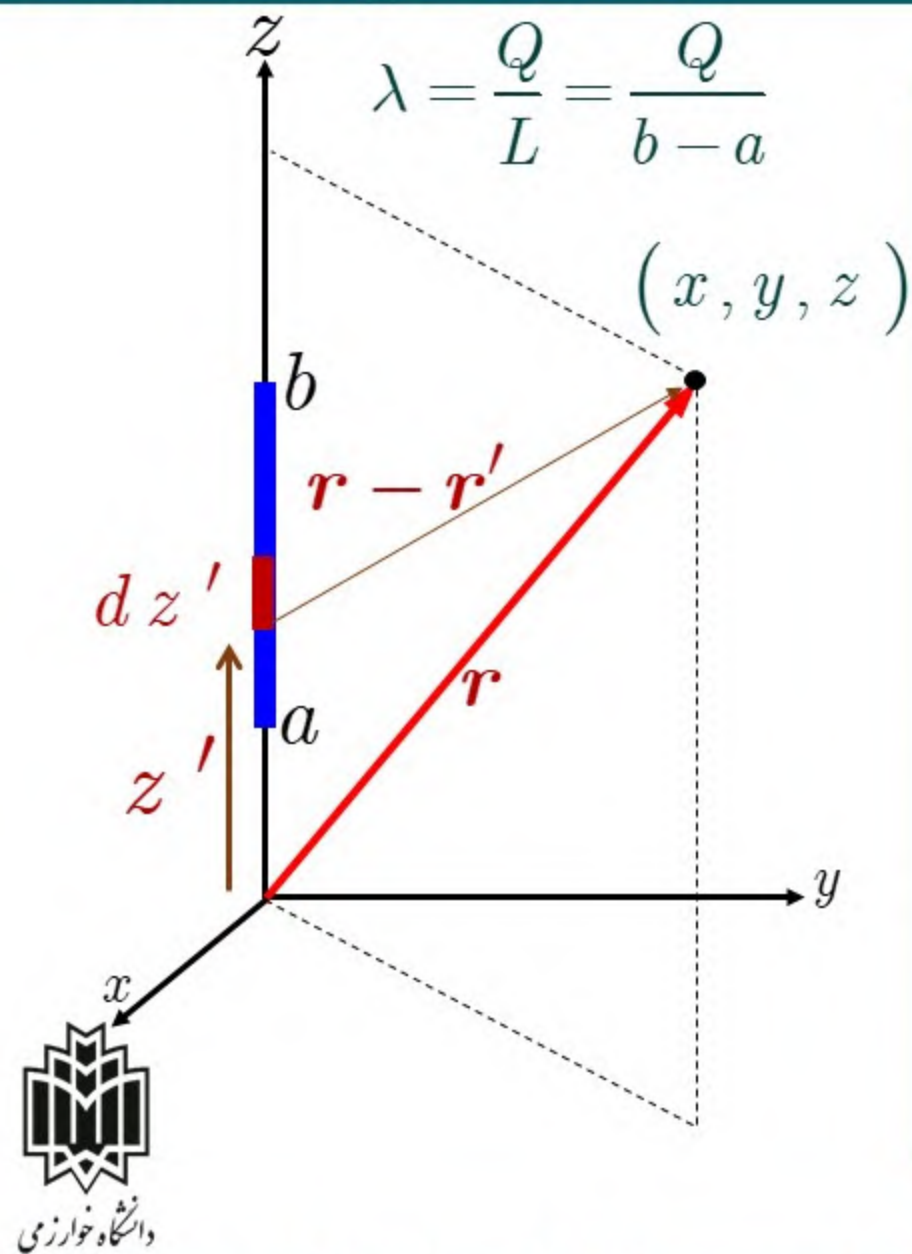
و برای مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای، چگالی حجمی بار الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(r) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(r - r_i)$$

هم‌چنین **بارهای خطی و سطحی** را می‌توان به همین شکل بر حسب چگالی حجمی بار الکتریکی نوشت. پس به طور کلی میدان الکتریکی را می‌توان بر حسب چگالی حجمی بیان کرد:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(r') \frac{(r - r')}{|r - r'|^3}$$





$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \lambda dl' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{r}' = z' \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$dl' = dz'$$

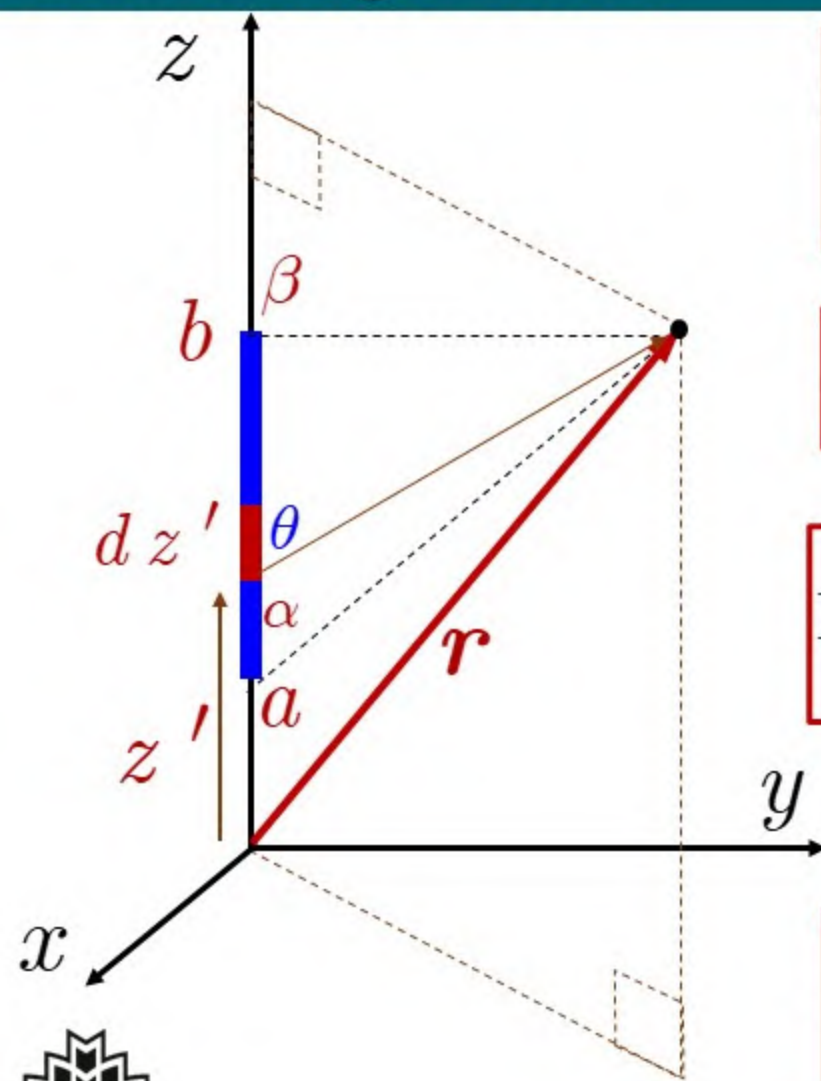
$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y + z\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \int_a^b dz' \frac{x}{\left[x^2 + y^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \int_a^b dz' \frac{y}{\left[x^2 + y^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \int_a^b dz' \frac{z - z'}{\left[x^2 + y^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}}$$





$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \int_a^b dz' \frac{x}{\left[x^2 + y^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}$$

$$z - z' = \sqrt{x^2 + y^2} \cot \theta$$

$$-dz' = -\sqrt{x^2 + y^2} (1 + \cot^2 \theta) d\theta$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \frac{x}{x^2 + y^2} \int_\alpha^\beta d\theta \sin \theta$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \frac{x(\cos \alpha - \cos \beta)}{x^2 + y^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{z-a}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{z-b}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-b)^2}}$$





$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \frac{x}{x^2 + y^2} \left[ \frac{z-a}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{z-b}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-b)^2}} \right]$$

و به طور مشابه برای مؤلفه‌ی  $y$  به دست خواهیم آورد:

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \frac{y}{x^2 + y^2} \left[ \frac{z-a}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{z-b}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-b)^2}} \right]$$



محاسبه ی مؤلفه ی  $z$ :

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \int_a^b dz' \frac{z-z'}{\left[x^2 + y^2 + (z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$x^2 + y^2 + (z-z')^2 = u^2 \Rightarrow -2(z-z')dz' = 2u du$$

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} \right]$$



$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \left[ \frac{\hat{\mathbf{e}}_z - \frac{z-b}{x^2+y^2}(x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-b)^2}} - \frac{\hat{\mathbf{e}}_z - \frac{z-a}{x^2+y^2}(x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} \right]$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \frac{x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \hat{\mathbf{e}}_\rho$$

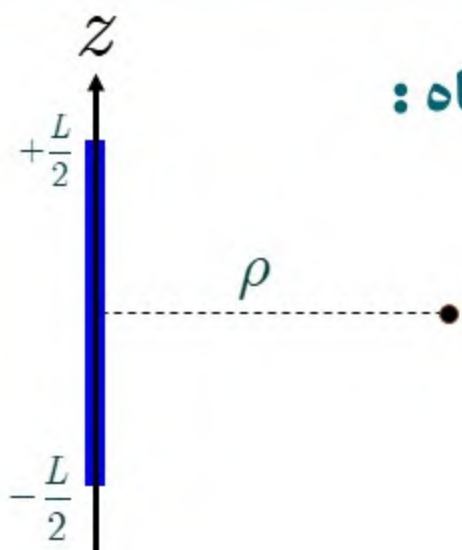
در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\mathbf{E}(\rho, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\rho\hat{\mathbf{e}}_z - (z-b)\hat{\mathbf{e}}_\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z-b)^2}} - \frac{\rho\hat{\mathbf{e}}_z - (z-a)\hat{\mathbf{e}}_\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}} \right]$$





اگر  $a = -L/2$  و  $b = L/2$  و نقطه‌ی میدان روی عمود منصف میله باشد ( $z=0$ ) آن گاه :

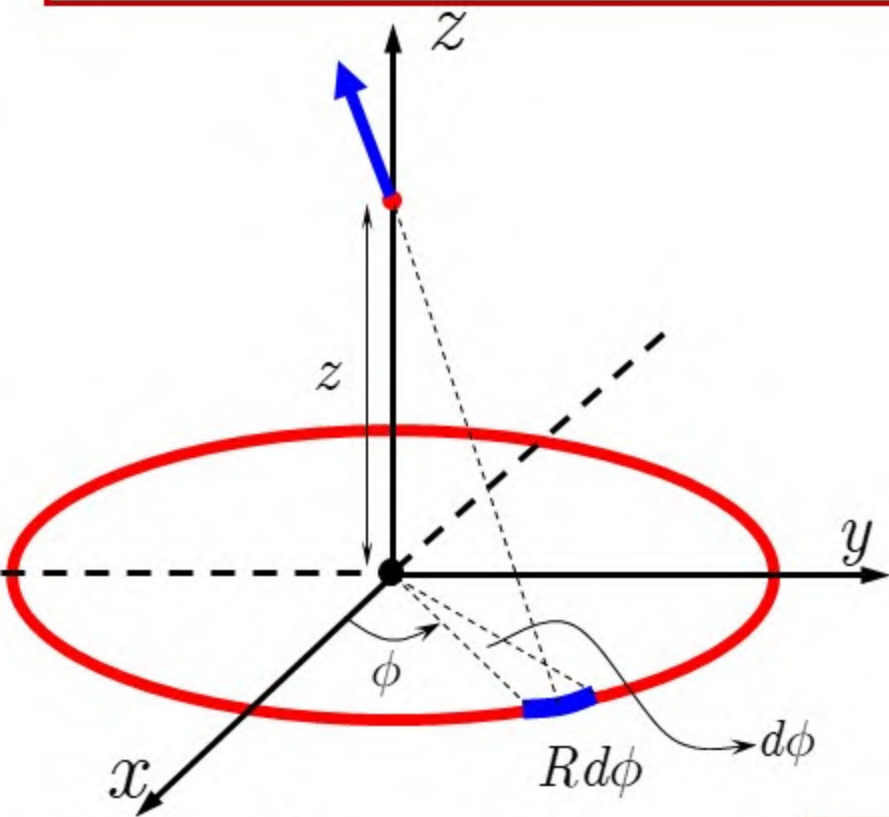


$$\mathbf{E}(\rho, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\rho \hat{\mathbf{e}}_z - (z-b) \hat{\mathbf{e}}_\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z-b)^2}} - \frac{\rho \hat{\mathbf{e}}_z - (z-a) \hat{\mathbf{e}}_\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}} \right]$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{\hat{\mathbf{e}}_\rho}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

$$\text{if } L \rightarrow \infty \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho$$

بار الکتریکی  $Q$  به طور یکنواخت بر حلقه ی دایره ای به شعاع  $R$  توزیع شده است. میدان الکتریکی را بر روی محور حلقه در فاصله ی  $z$  پیدا کنید.



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \lambda d\mathbf{l} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\mathbf{r}' = R\hat{\mathbf{e}}_\rho = R(\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y)$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\hat{\mathbf{e}}_z - R\hat{\mathbf{e}}_\rho = z\hat{\mathbf{e}}_z - R\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x - R\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y$$

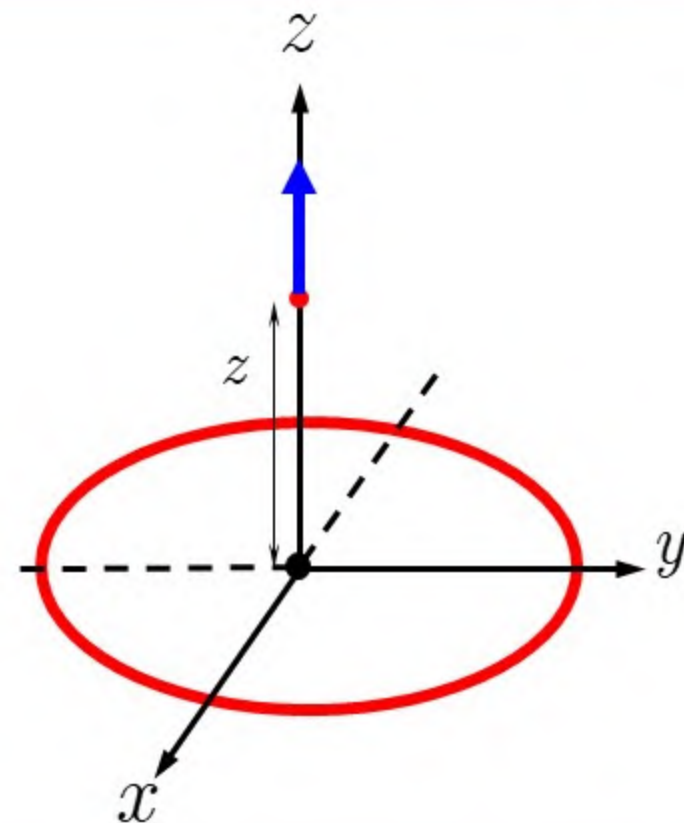
$$dq = \lambda dl$$



$$E_x = \frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$$

$$E_y = \frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0$$

$$E_z = \frac{\lambda R z}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\lambda 2\pi R z}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q z}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$$\mathbf{E} = \frac{Q z}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{e}}_z$$



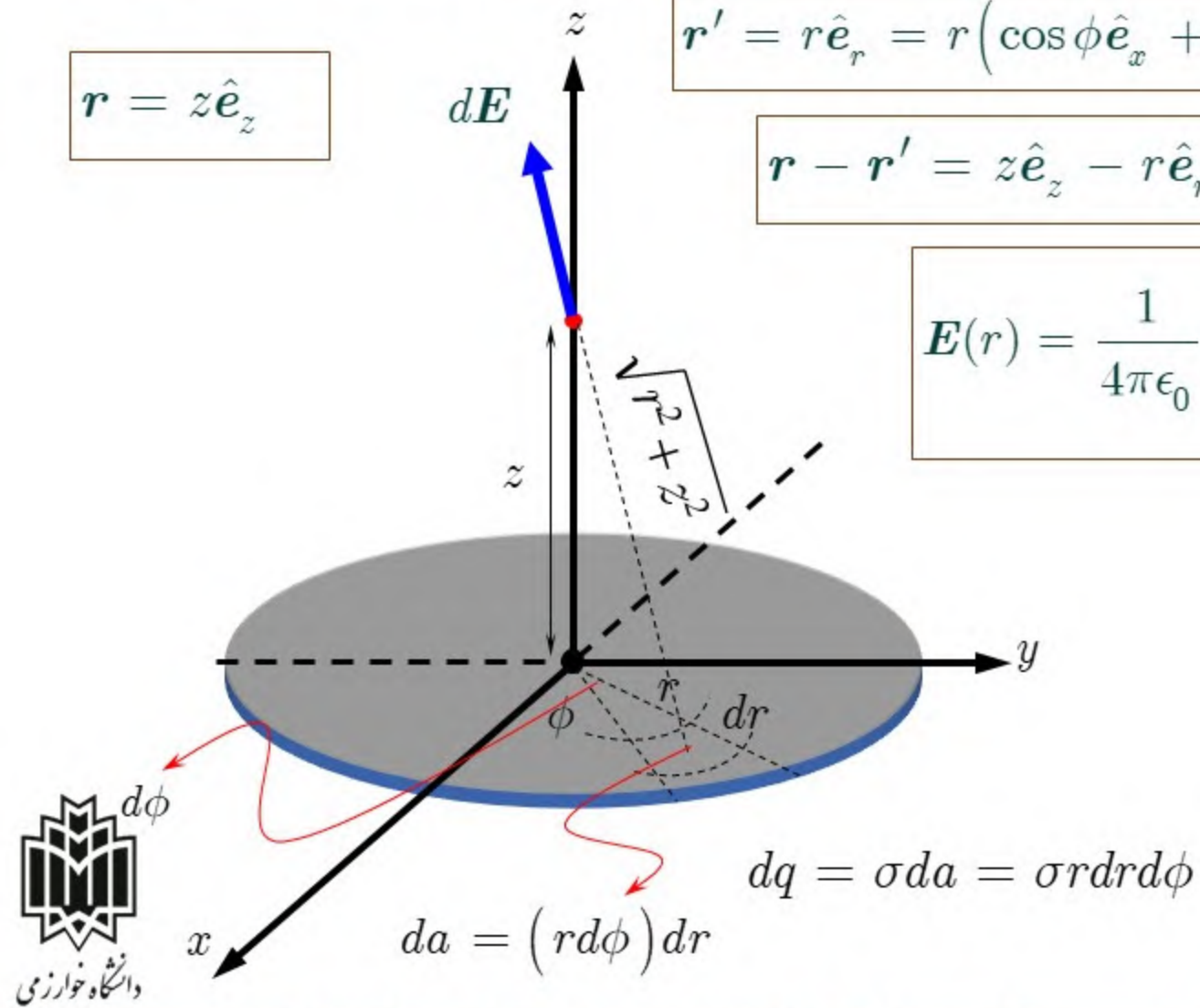
بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی  $\sigma$  بر روی قرص دایره‌ای به شعاع  $R$  توزیع شده است. میدان الکتریکی را با توجه به شکل زیر در نقطه‌ی  $(0, z)$  پیدا کنید.

$$\mathbf{r} = z\hat{e}_z$$

$$\mathbf{r}' = r\hat{e}_r = r(\cos\phi\hat{e}_x + \sin\phi\hat{e}_y)$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\hat{e}_z - r\hat{e}_r = z\hat{e}_z - r\cos\phi\hat{e}_x - r\sin\phi\hat{e}_y$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \sigma r dr d\phi \frac{z\hat{e}_z - r\cos\phi\hat{e}_x - r\sin\phi\hat{e}_y}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$



$$E_z = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0} \frac{r \cos\phi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = 0$$

$$E_y = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0} \frac{r \sin\phi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = 0$$

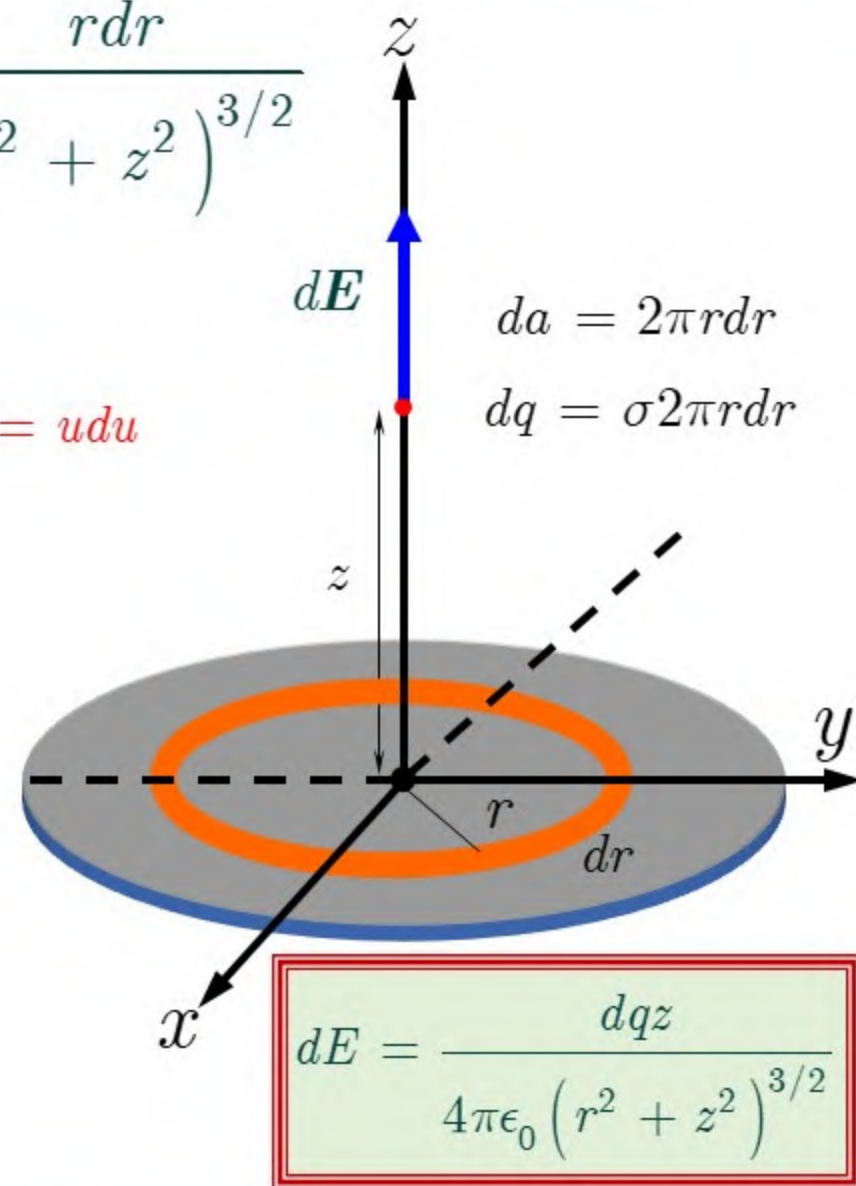
$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^{r=R} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{rdrd\phi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^{r=R} \frac{rdr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{E} = E_z \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_{r=0}^{r=R} \frac{rdr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$r^2 + z^2 = u^2 \Rightarrow rdr = udu$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] & z > 0 \\ -\hat{\mathbf{e}}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] & z < 0 \end{cases}$$

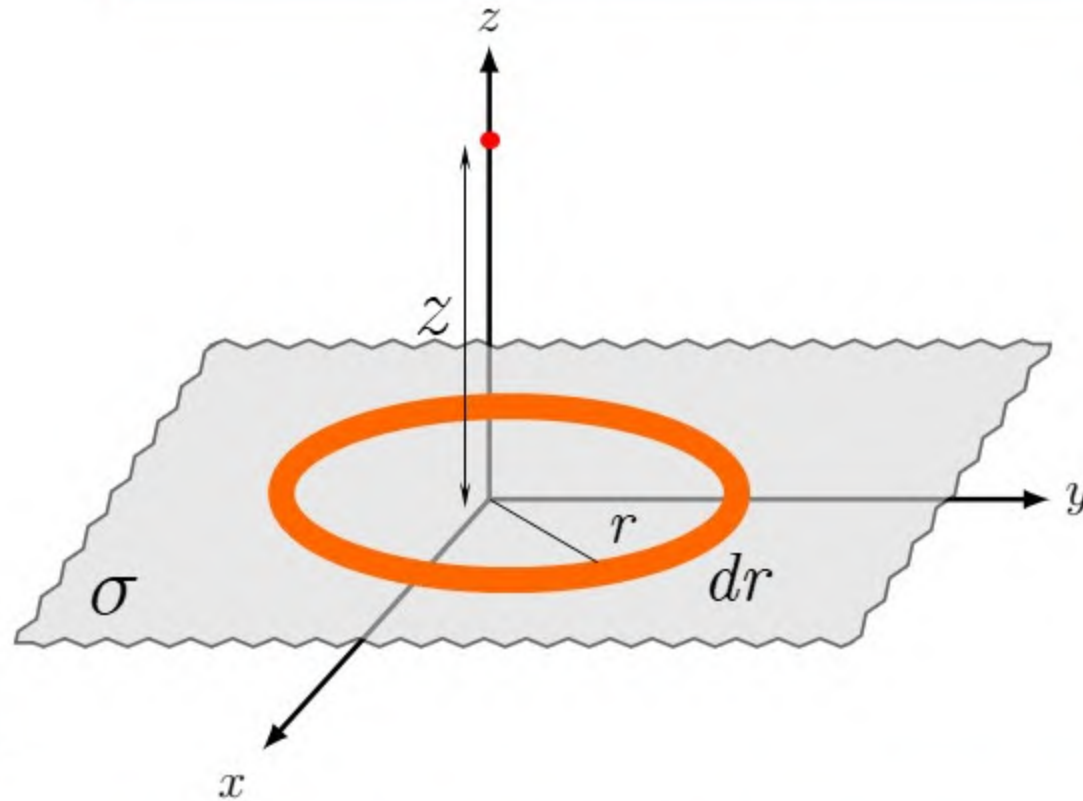


$$dE = \frac{dqz}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}}$$

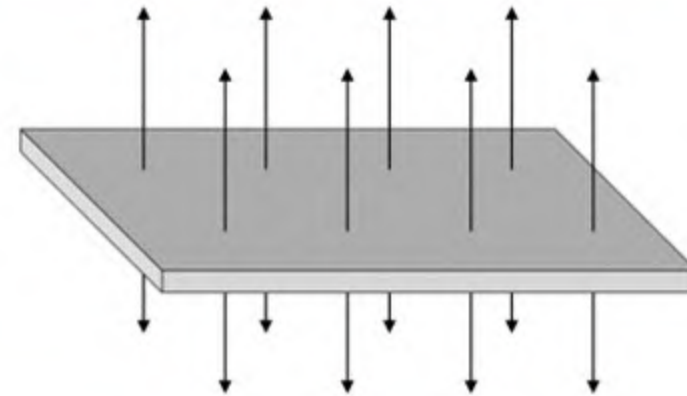


میدان الکتریکی ناشی از یک ورقه‌ی نارسانای نازک با ابعاد بی نهایت و چگالی سطحی باریکنواخت

$$E = \frac{z\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{rdr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_{r=0}^{r=\infty} = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right]$$

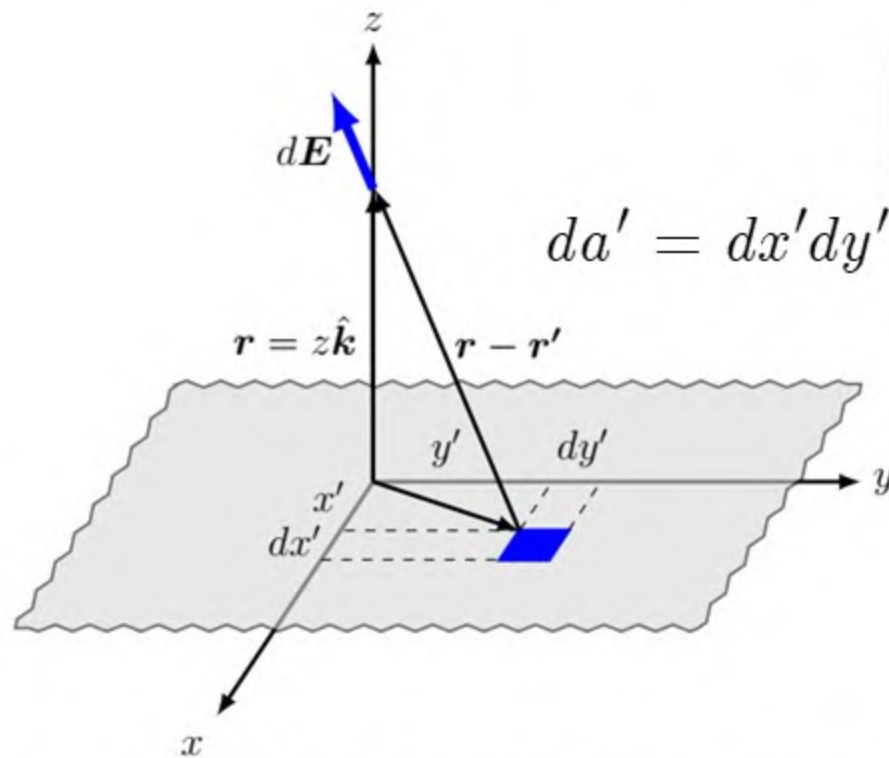


$$\mathbf{E} = \begin{cases} \hat{k} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & z > 0 \\ -\hat{k} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & z < 0 \end{cases}$$





میدان الکتریکی ناشی از یک ورقه‌ی نارسانای نازک با ابعاد بی نهایت و چگالی سطحی باریکنواخت (روش دوم)



$$\mathbf{r} = z\hat{k}, \quad \mathbf{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j}$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\hat{k} - x'\hat{i} - y'\hat{j}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}$$

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int da' \sigma \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' dy' \frac{z\hat{k} - x'\hat{i} - y'\hat{j}}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  صفر می‌شود زیرا انتگرال‌دهی آن‌ها توابعی فرد هستند و انتگرال بر روی بازه‌ی متقارن گرفته می‌شود

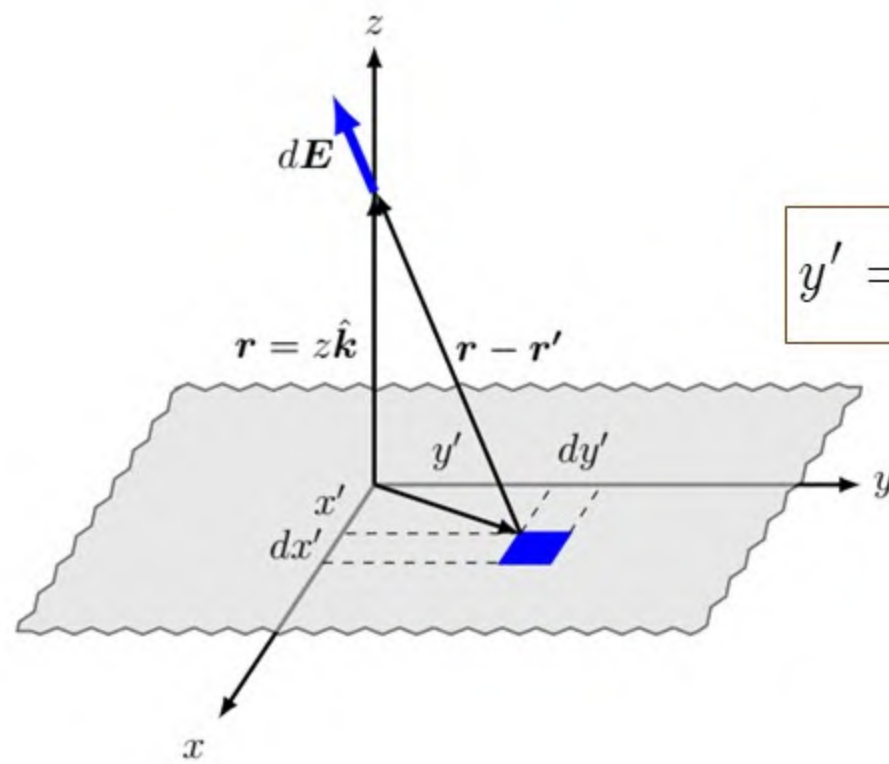
$$E_x = E_y = 0$$



(روش دوم)

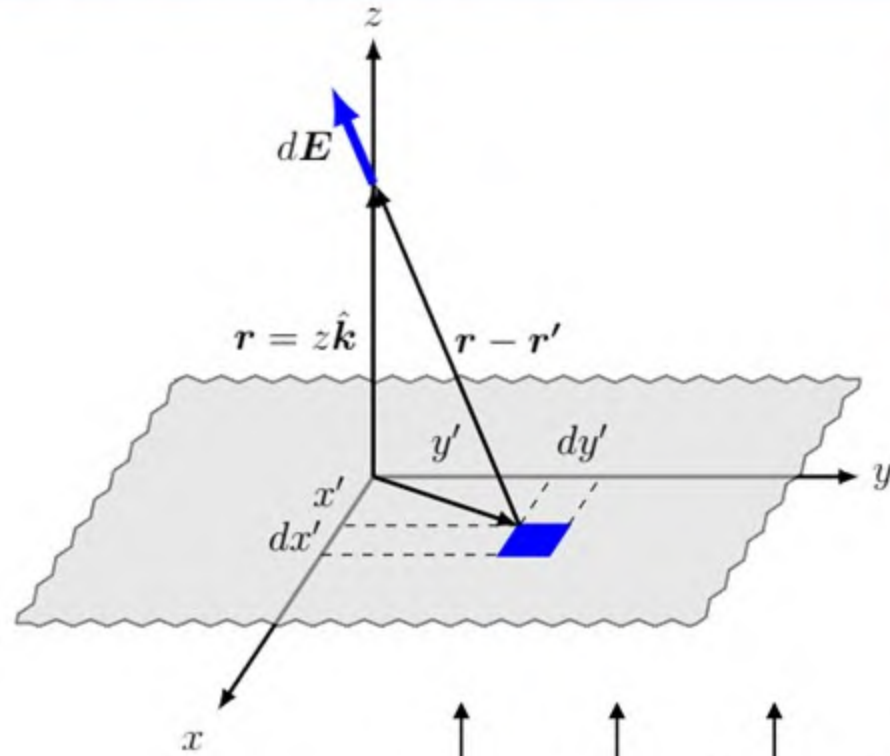
$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx' dy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$y' = \left( \sqrt{x'^2 + z^2} \right) \tan \theta \quad dy' = \left( \sqrt{x'^2 + z^2} \right) (1 + \tan^2 \theta) d\theta$$



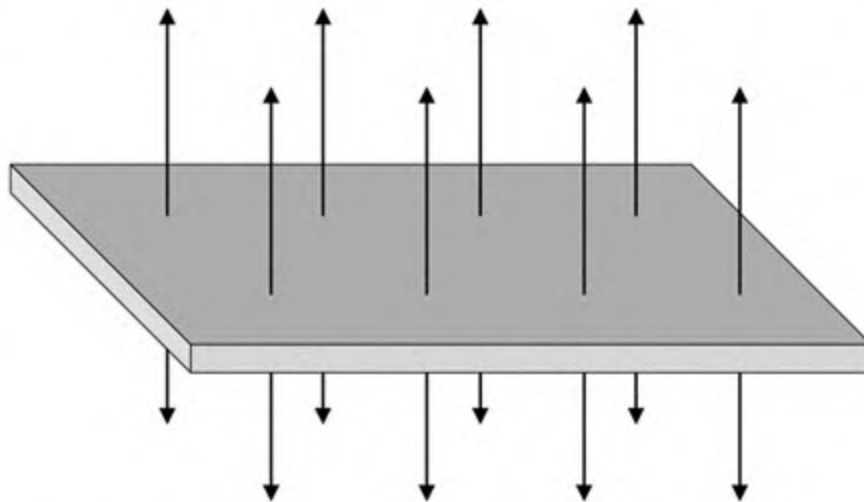
$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x'^2 + z^2}}{(x'^2 + z^2)^{3/2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \\ &= \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{x'^2 + z^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta \\ &= \frac{2\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{x'^2 + z^2} \end{aligned}$$

برای محاسبه‌ی انتگرالِ اخیر نیز تغییرِ متغیرِ  $x' = z \tan \alpha$  را به کار می‌بریم



$$E_z = \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{z(1 + \tan^2 \alpha)}{z^2(1 + \tan^2 \alpha)} d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \hat{k} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & z > 0 \\ -\hat{k} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & z < 0 \end{cases}$$





## شاد و مهربان باشید

---

