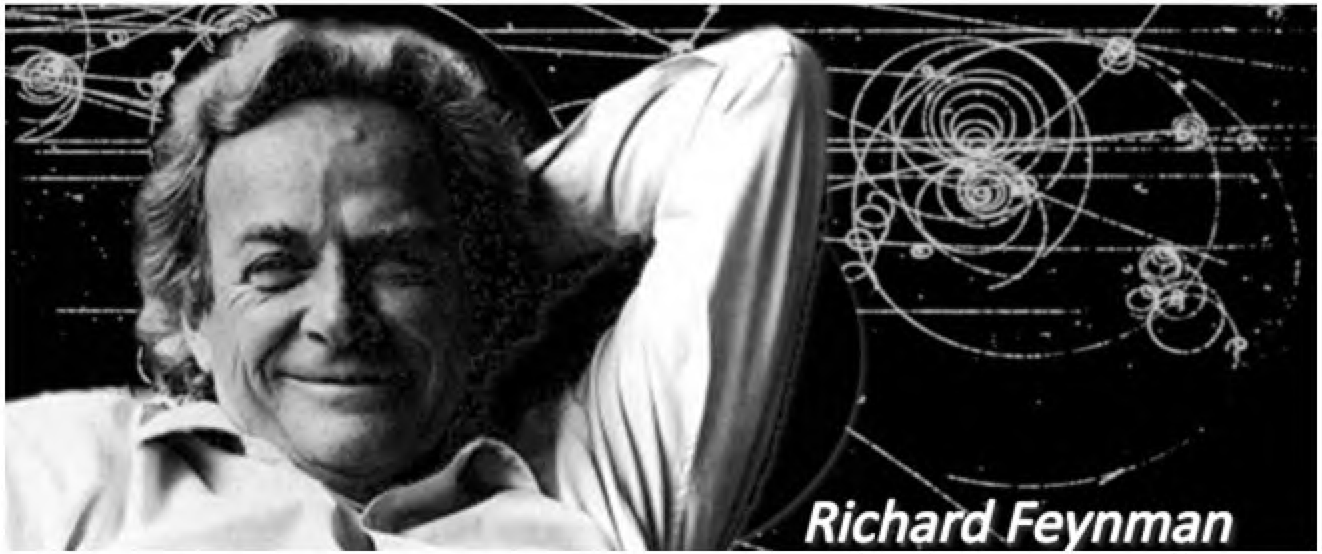
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

دانشگاه خوارزمی

درس هفدهم

پتانسیل الکتریکی

Electric Potential

دانشگاه خوارزمی

هر میدان برداری شعاعی به صورت $\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{r}\right) = f(r)\hat{e}_r$ غیر گردشی است

$$\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \left[\, f(r)\hat{\boldsymbol{e}}_r \,\right] = 0$$

پس میدان الکتروستاتیکی نیز یک میدان غیر گردشی است.

این مطلب را به طور مستقیم نیز اثبات می کنیم:

دانشگاه خوارزمی

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \int dv' \, \rho(\boldsymbol{r}') \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|^3}$$

عملگر کرل بر **مختصات بدون پریم** اثر می‌کند و انتگرال بر روی **مختصات پریم‌دار** گرفته می‌شود

بنابر این:

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dv' \nabla \times \left[\rho(\boldsymbol{r}') \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|^3} \right]$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\nabla \times \left(f\boldsymbol{F}\right) = \nabla f \times \boldsymbol{F} + f\nabla \times \boldsymbol{F}}$$

$$\nabla \times \left[\rho(\boldsymbol{r}')\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\right] = \underbrace{\left[\nabla \rho(\boldsymbol{r}')\right]}_{0} \times \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} + \rho(\boldsymbol{r}')\left[\nabla \times \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\right]$$

$$\nabla \times \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} = \left[\nabla \frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\right] \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\underbrace{\nabla \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}_{0}$$

$$\left[\nabla \frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\right] \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -3\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^5} \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\nabla \frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} = ?}$$

$$\boxed{\nabla \frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\right) + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\right) + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\right) = -\frac{3}{2}\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{-\frac{5}{2}}\left[2(x-x')\right]}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\right) = -\frac{3(x-x')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{\frac{5}{2}}}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^{3}}\right)=-3\frac{(x-x')}{\left[(x-x')^{2}+(y-y')^{2}+(z-z')^{2}\right]^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^{3}}\right)=-3\frac{(y-y')}{\left[(x-x')^{2}+(y-y')^{2}+(z-z')^{2}\right]^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^{3}}\right)=-3\frac{(z-z')}{\left[(x-x')^{2}+(y-y')^{2}+(z-z')^{2}\right]^{\frac{5}{2}}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\nabla \frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} = \hat{\boldsymbol{e}}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\right) + \hat{\boldsymbol{e}}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\right) + \hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\right)$$

$$\nabla \frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} = -3\frac{(x-x')\hat{\boldsymbol{e}}_x}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^5} - 3\frac{(y-y')\hat{\boldsymbol{e}}_y}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^5} - 3\frac{(z-z')\hat{\boldsymbol{e}}_y}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^5}$$

$$\nabla \frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} = -3\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^5}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dv' \, \rho(\boldsymbol{r}') \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|^3} \right] = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\int_A \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da = \oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

میدان الکتریکی غیر چرخشی است پس آن را می‌توان به صورت گرادیان یک تابع اسکالر نوشت

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\Phi(\boldsymbol{r})$$

پتانسیل الکتروستاتیکی

دانشگاه خوارزمی

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dv'\,\rho(\boldsymbol{r}')\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dv'\,\rho(\boldsymbol{r}')\left[-\nabla\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\right]$$

$$= -\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dv'\,\rho(\boldsymbol{r}')\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\right]$$

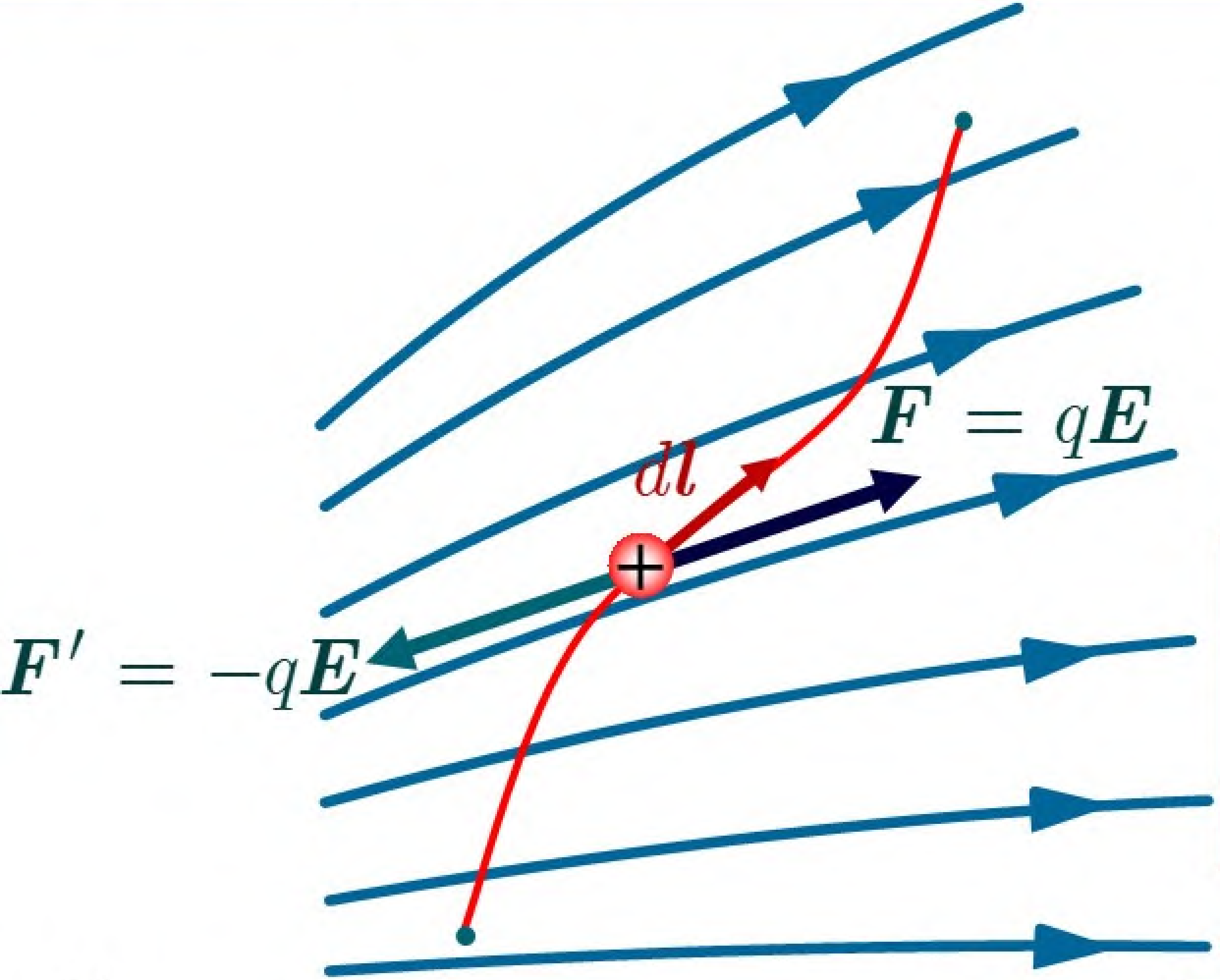
$$= -\nabla\Phi(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|} = -\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dv'\,\rho(\boldsymbol{r}')\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}$$

دانشگاه خوارزمی



کار میدان :

$$\boxed{W_E = \int_{r_0}^{r} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = q\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}}$$

کار عامل خارجی :

$$\boxed{\begin{aligned} W_{ext} &= \int_{r_0}^{r} \boldsymbol{F}' \cdot d\boldsymbol{l} = -q\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} \\ &= -W_E \end{aligned}}$$

$$\boxed{\Delta U = U(\boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r}_0) = W_{ext} = -W_E}$$

بنابر این در مورد تغییر انرژی پتانسیل سیستم می توان نوشت:

$$\Delta U = -\int_{r_0}^{r} q\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\frac{\Delta U}{q} = -\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\Phi(\boldsymbol{r})$$

$$\frac{\Delta U}{q} = \int_{r_0}^{r} \nabla\Phi\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{r_0}^{r} d\Phi = \Phi(\boldsymbol{r}) - \Phi(\boldsymbol{r}_0)$$

$$\frac{\Delta U}{q} = \Delta\Phi$$

ولت = $\frac{\text{ژول}}{\text{کولن}}$

کار لازم برای انتقال یک الکترون (یا پروتون) بین دو نقطه با اختلاف پتانسیل یک ولت:

$$\begin{aligned}\left|W\right| &= e\Delta V\\ &= (1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C})(1\ \mathrm{V})\\ &= 1.6\times10^{-19}\ \mathrm{J}\end{aligned}$$

$$1\ e\mathrm{V} = 1.6\times10^{-19}\ \mathrm{J}$$

$$\boxed{\Delta\Phi = \Phi(\boldsymbol{r}) - \Phi(\boldsymbol{r}_0) = \frac{\Delta U}{q} = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}}$$

با انتخاب مقدار صفر برای پتانسیل در نقطه‌ی مرجع می‌توان نوشت:

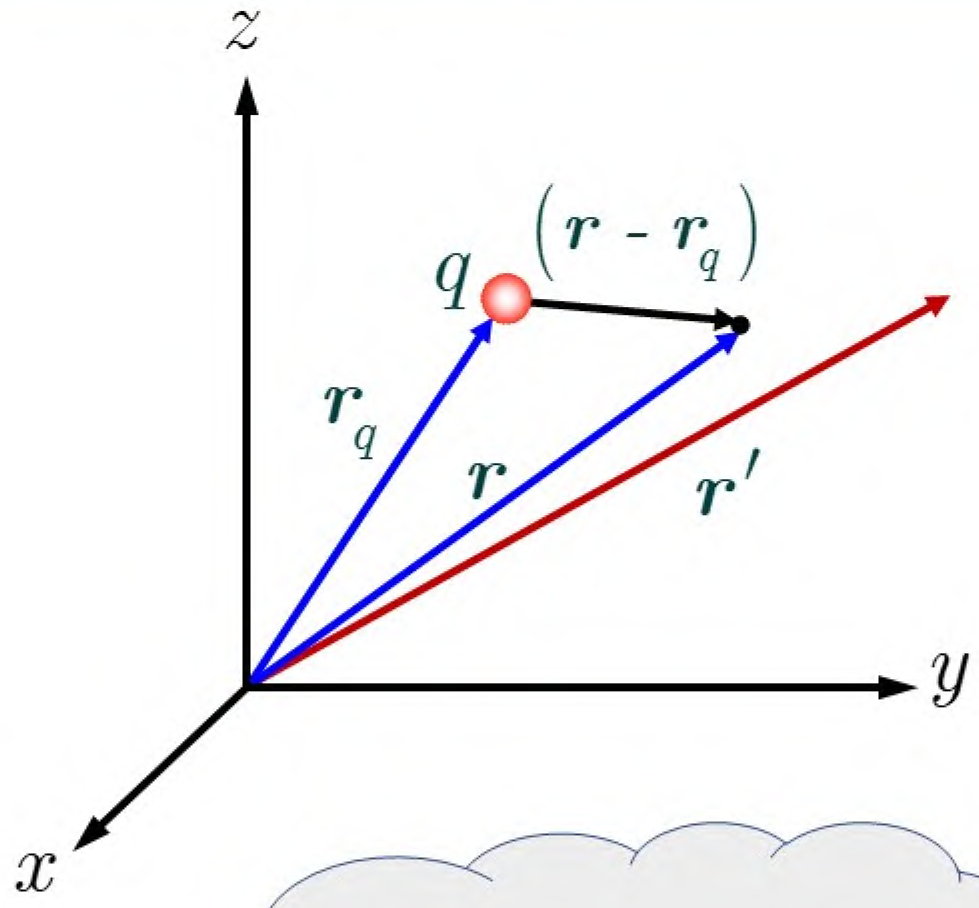
$$\boxed{\Phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_{erf}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}}$$

اگر نقطه‌ی مرجع پتانسیل را در بی‌نهایت بگیریم:

$$\boxed{\Phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\infty}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}}$$

دانشگاه خوارزمی

پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای نسبت به بی نهایت:

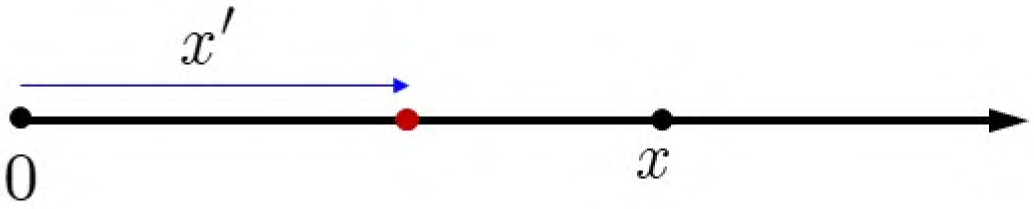


$$\int \nabla\Psi \cdot d\boldsymbol{l} = \int d\Psi$$

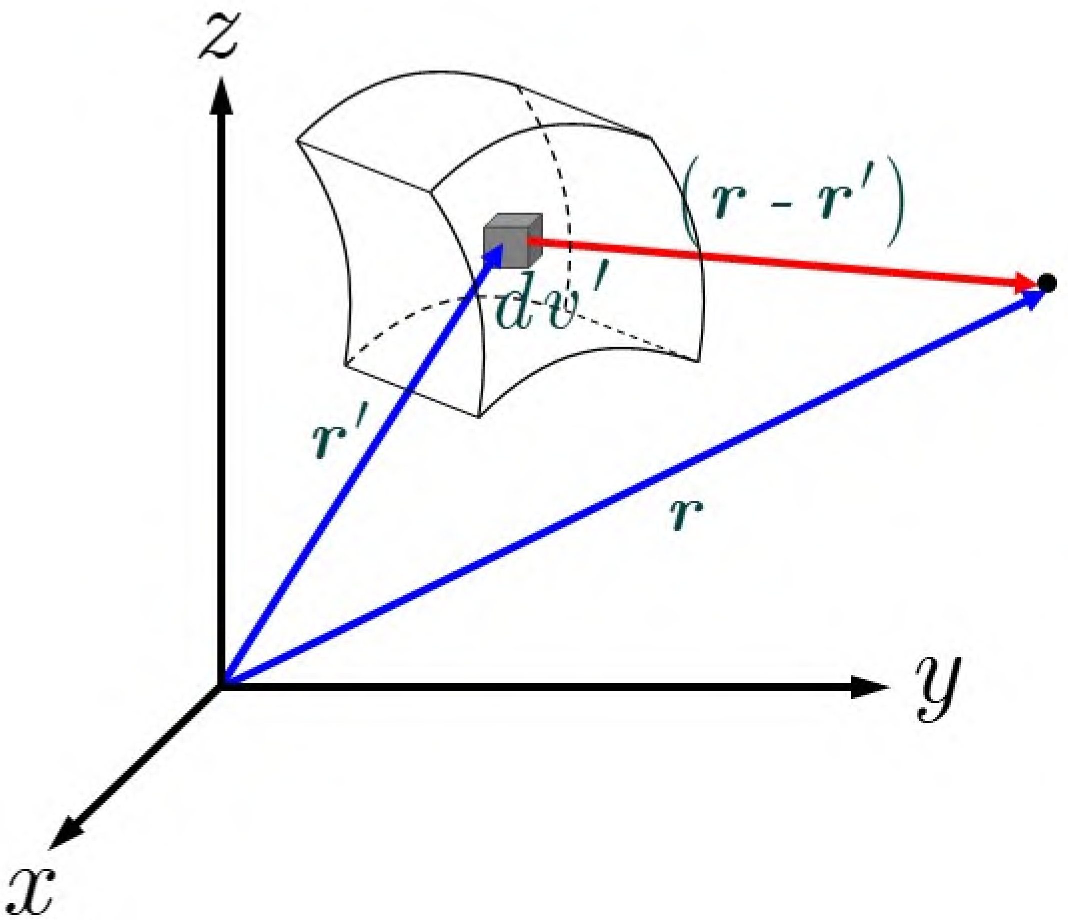
$$\begin{aligned}
\Phi(\boldsymbol{r}) &= -\int_{\infty}^{r} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_q}{\left|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_q\right|^3} \cdot d\boldsymbol{l} \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r} \left[-\nabla \frac{1}{\left|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_q\right|}\right] \cdot d\boldsymbol{l} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r} d\left(\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_q\right|}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q\right|}
\end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\int_0^x f(x)dx$$



$$\int_0^x f(x')dx'$$



$$d\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}dv'$$

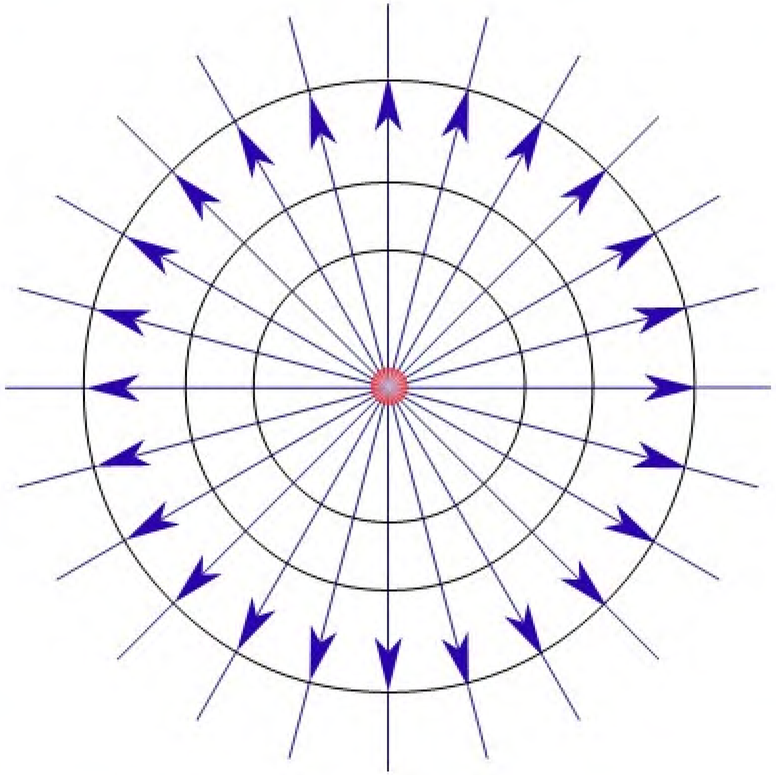
مکان هندسی تمام نقاطی که دارای پتانسیل یکسانی باشند، سطوح هم پتانسیل نامیده می‌شوند.

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \text{constant}$$

برای بار نقطه‌ای این سطوح کره‌های هم‌مرکز، به مرکز بار هستند

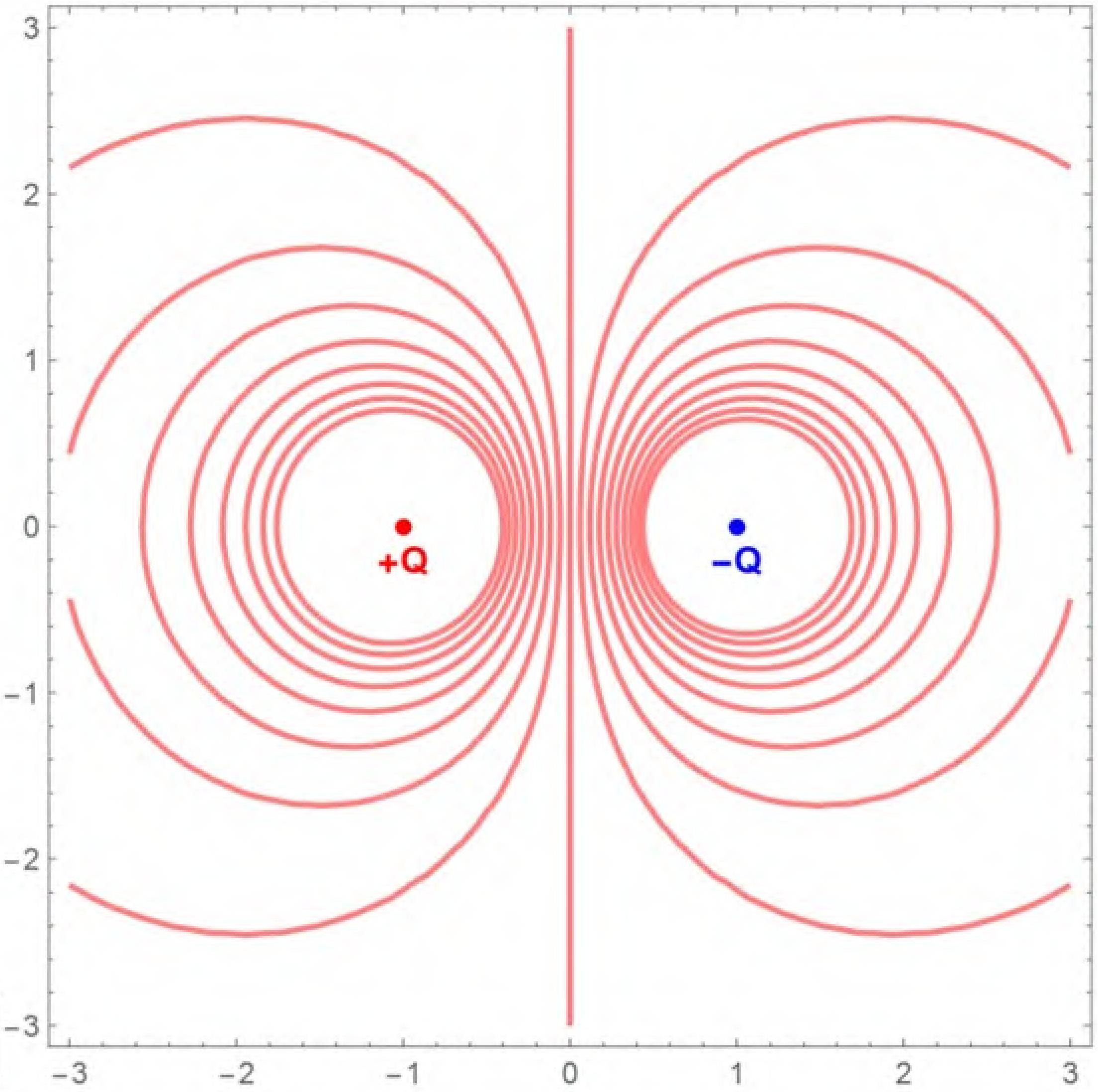
$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q|} = \Phi_0$$

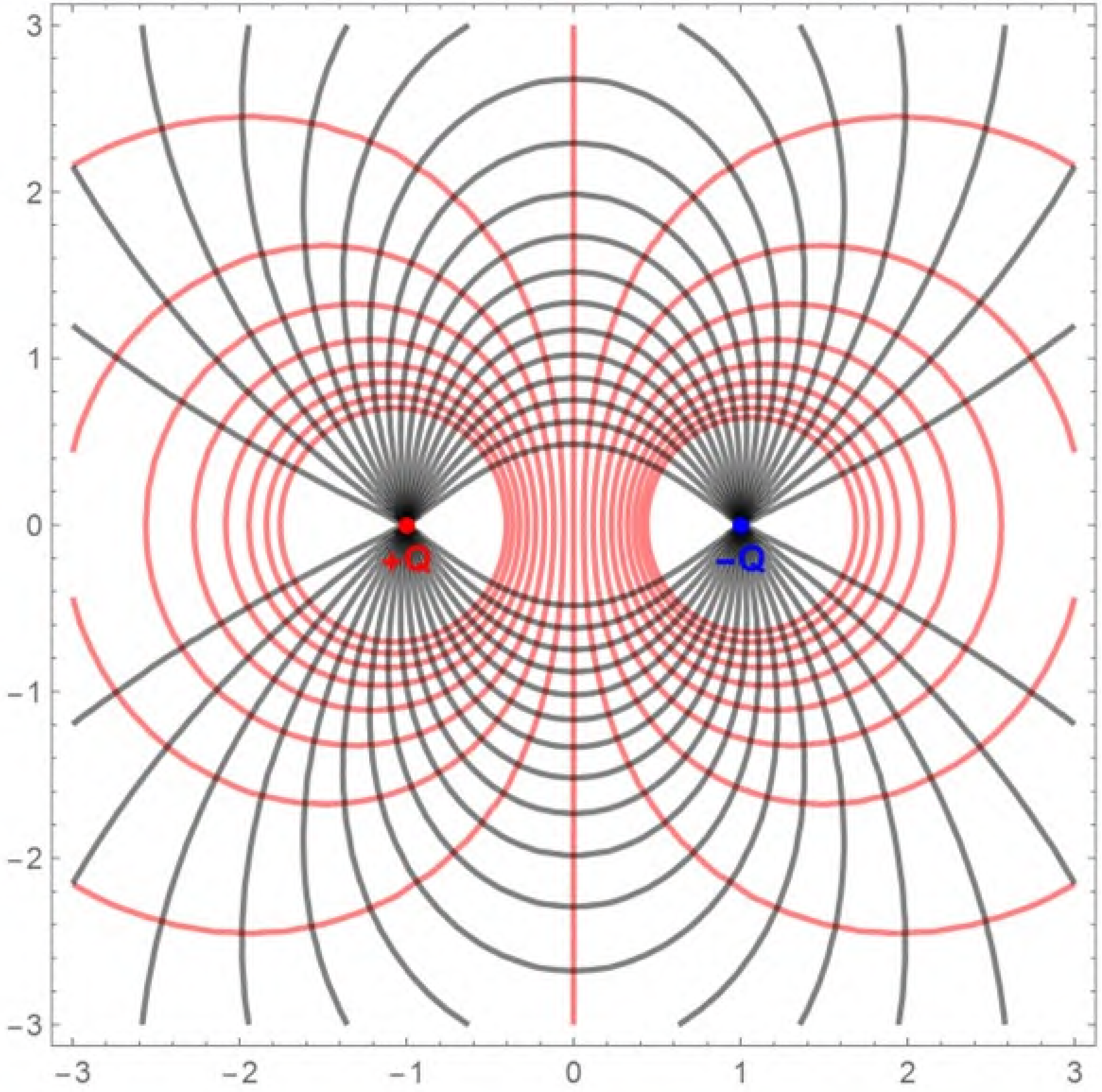
$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\Phi_0} = \text{constant}$$



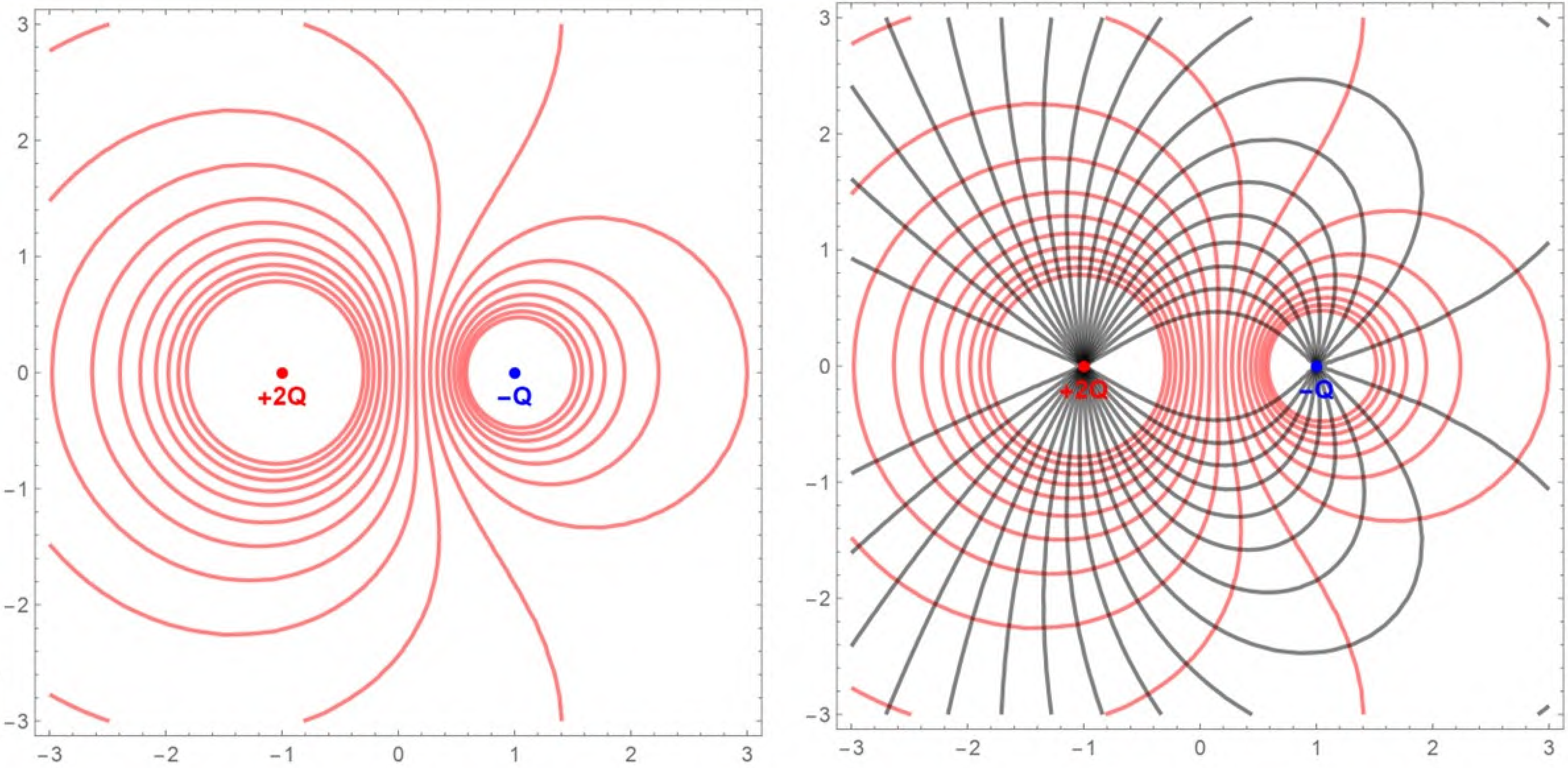
سطوح هم پتانسیل بر خطوط میدان عمودند

$$\Phi(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{l}) - \Phi(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$





دانشگاه خوارزمی


+2Q
−Q
+2Q
−Q

شاد و مهربان باشید