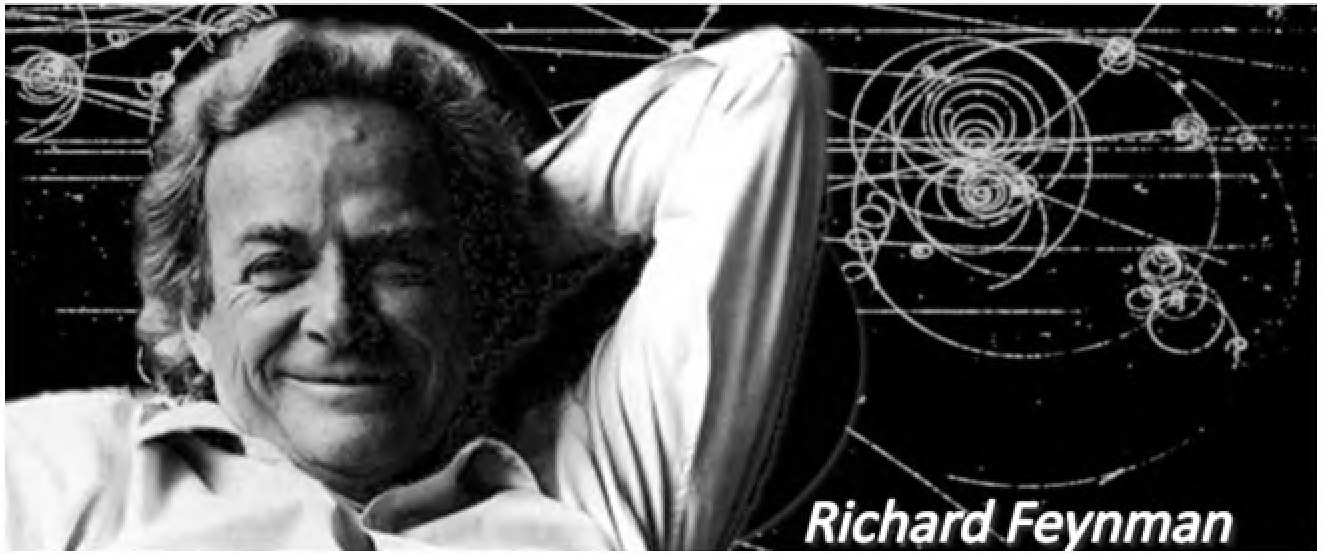
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

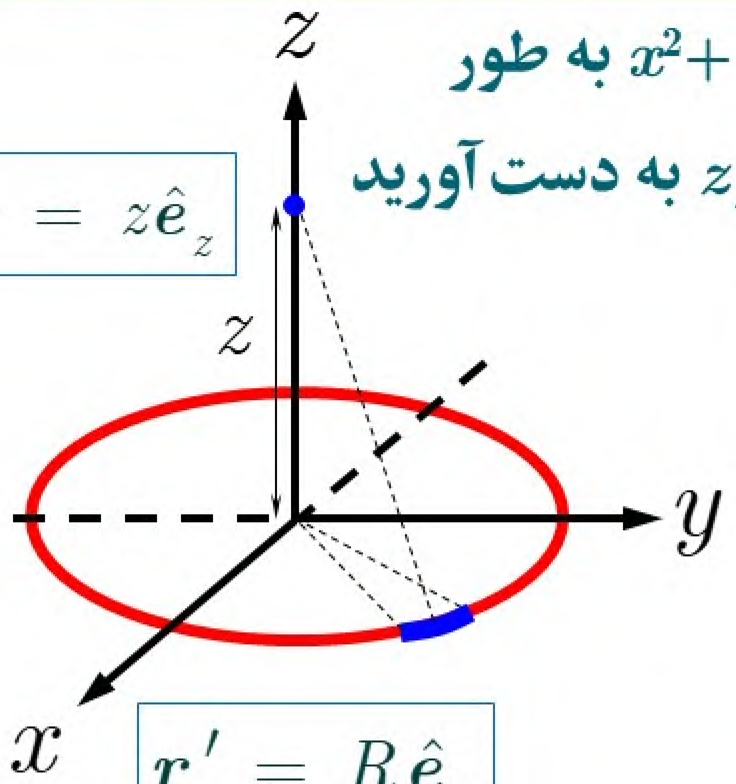
درس هیجدهم

پتانسیل الکتریکی-حل چند مسئله

Electric Potential-Solved Problems

دانشگاه خوارزمی

بار الکتریکی Q بر روی حلقه‌ی دایره‌ای به شعاع R به معادله‌ی $x^2+y^2=R^2$ به طور یکنواخت توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی را در نقطه ای بر روی محور z به دست آورید



$$\boldsymbol{r} = z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\boldsymbol{r}' = R\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

$$\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|}$$

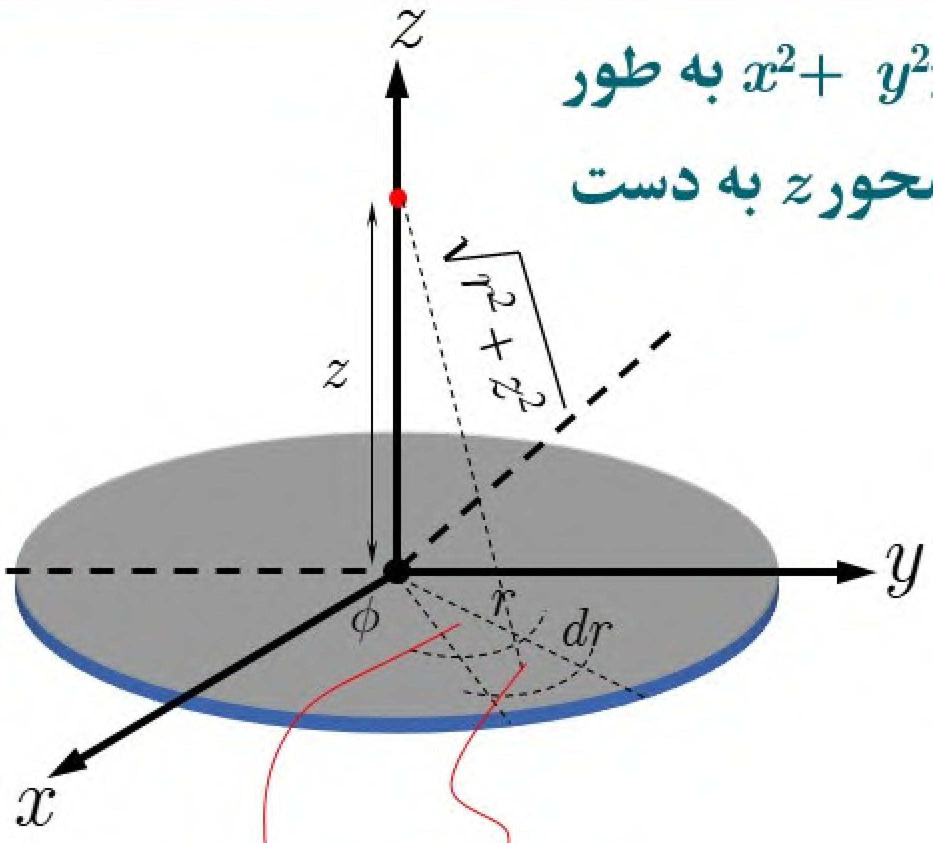
$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}}\int dq$$

$$\Phi(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

بار الکتریکی Q بر روی قرص دایره ای به شعاع R به معادله‌ی $x^2+y^2\leq R^2$ به طور یکنواخت توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ای بر روی محور z به دست آورید



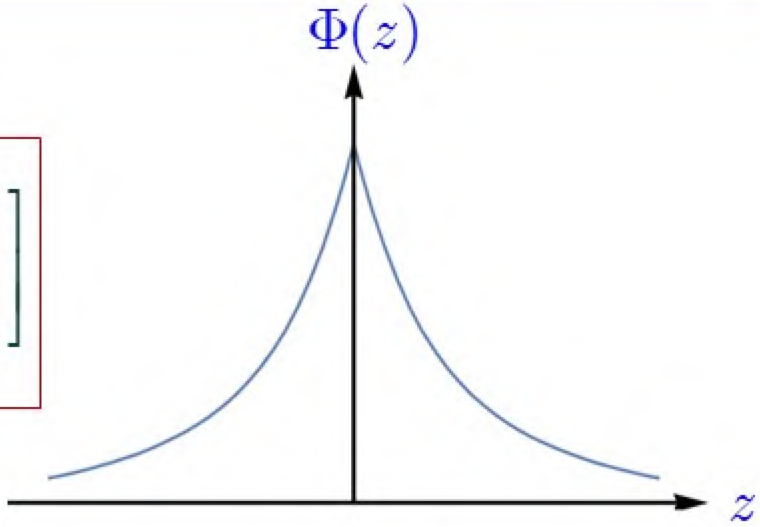
$d\phi \qquad da = \left(rd\phi\right)dr$

$$dq = \sigma da = \sigma r dr d\phi$$

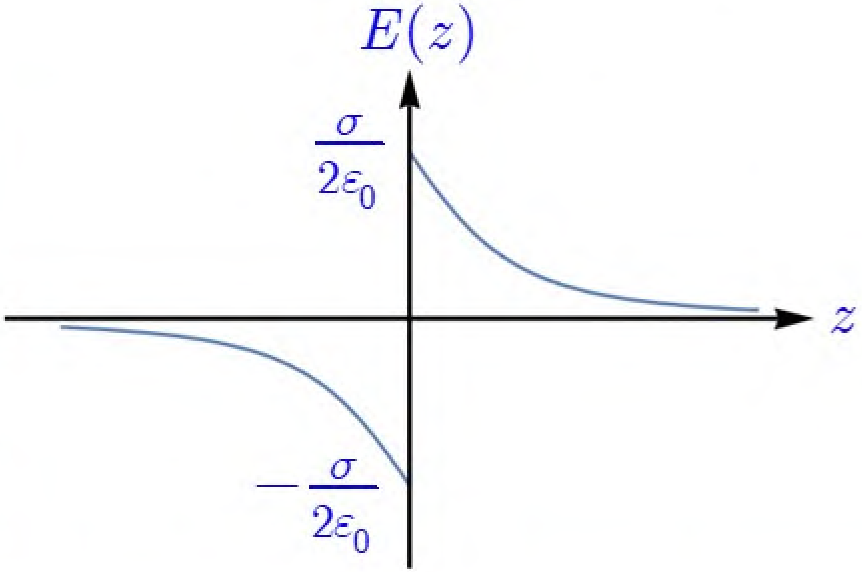
$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\sigma r dr d\phi}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2}-\left|z\right|\right]$$

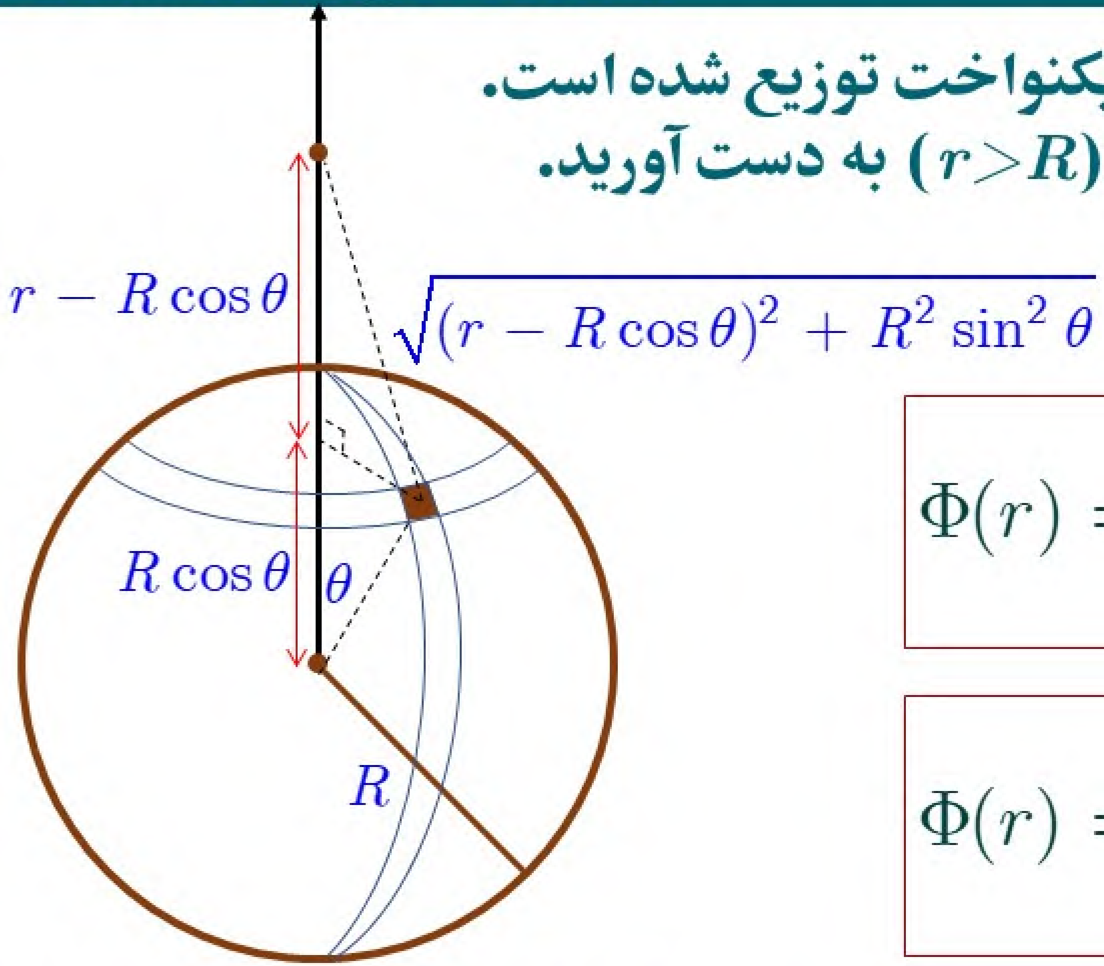
$$\boxed{\Phi(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z|\right]}$$



$$E_z(z) = -\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) & z < 0 \end{cases}$$



بار الکتریکی Q بر سطح پوسته‌ی کروی به شعاع R به طور یکنواخت توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی را در نقاط داخل $(r<R)$ و خارج پوسته $(r>R)$ به دست آورید.



$$dq = \sigma R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\boxed{\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}}}$$

$$\boxed{\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\phi}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}}}$$

$$\boxed{\Phi(r) = \frac{\sigma R^2 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}}}$$

$$\Phi(r) = \frac{\sigma R^2 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}}$$

$$u = r^2 - 2rR\cos\theta + R^2 \Rightarrow du = 2rR\sin\theta d\theta \Rightarrow \sin\theta d\theta = \frac{du}{2rR}$$

$$\Phi(r) = \frac{\sigma R^2 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2rR}\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$\theta = 0 \rightarrow u = r^2 - 2rR + R^2 = (r-R)^2$$

$$\theta = \pi \rightarrow u = r^2 + 2rR + R^2 = (r+R)^2$$

$$\Phi(r) = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0}\frac{1}{r}\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$\Phi(r) = \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r}(2\sqrt{u})\Big|_{(r-R)^2}^{(r+R)^2}$$

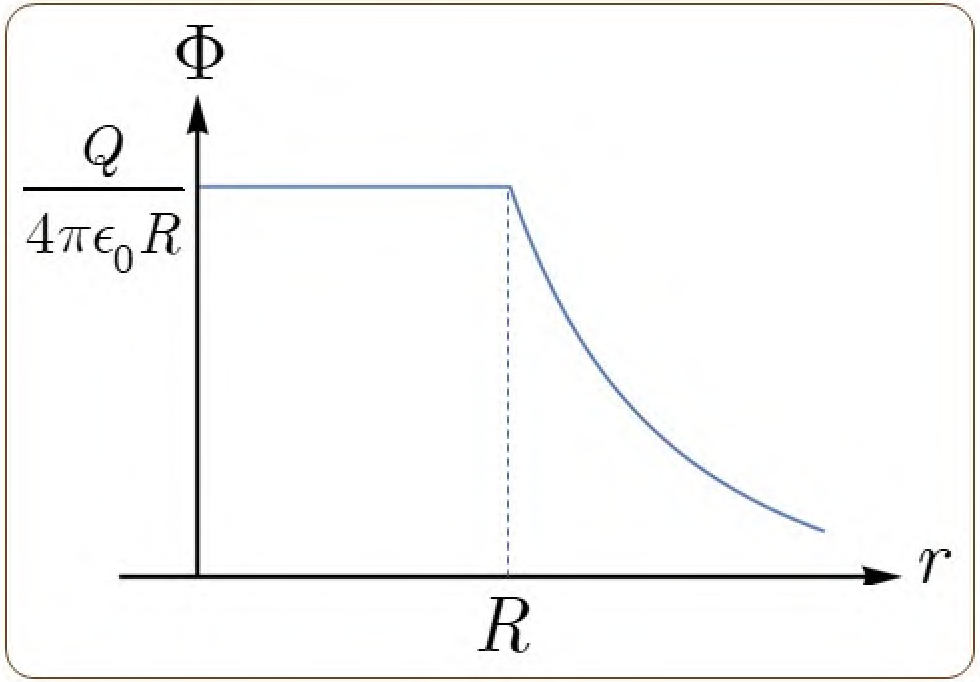
دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(r)=\frac{\sigma R}{4\epsilon_0}\frac{1}{r}(2\sqrt{u})\Big|_{(r-R)^2}^{(r+R)^2}$$

$$\Phi(r)=\frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\frac{1}{r}\left(\sqrt{(r+R)^2}-\sqrt{(r-R)^2}\right)$$

الف) $r>R$

$$\Phi(r)=\frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\frac{1}{r}\left[(r+R)-(r-R)\right]=\frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



ب) $r<R$

$$\Phi(r)=\frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\frac{1}{r}\left[(r+R)-(R-r)\right]=\frac{\sigma R}{\epsilon_0}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی