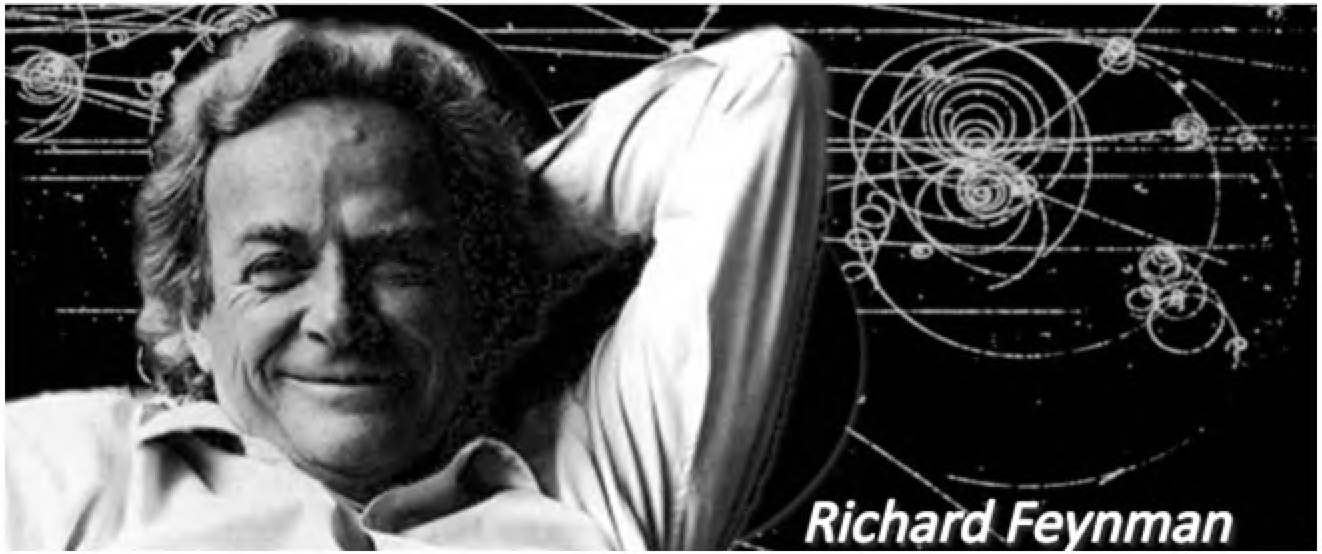
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

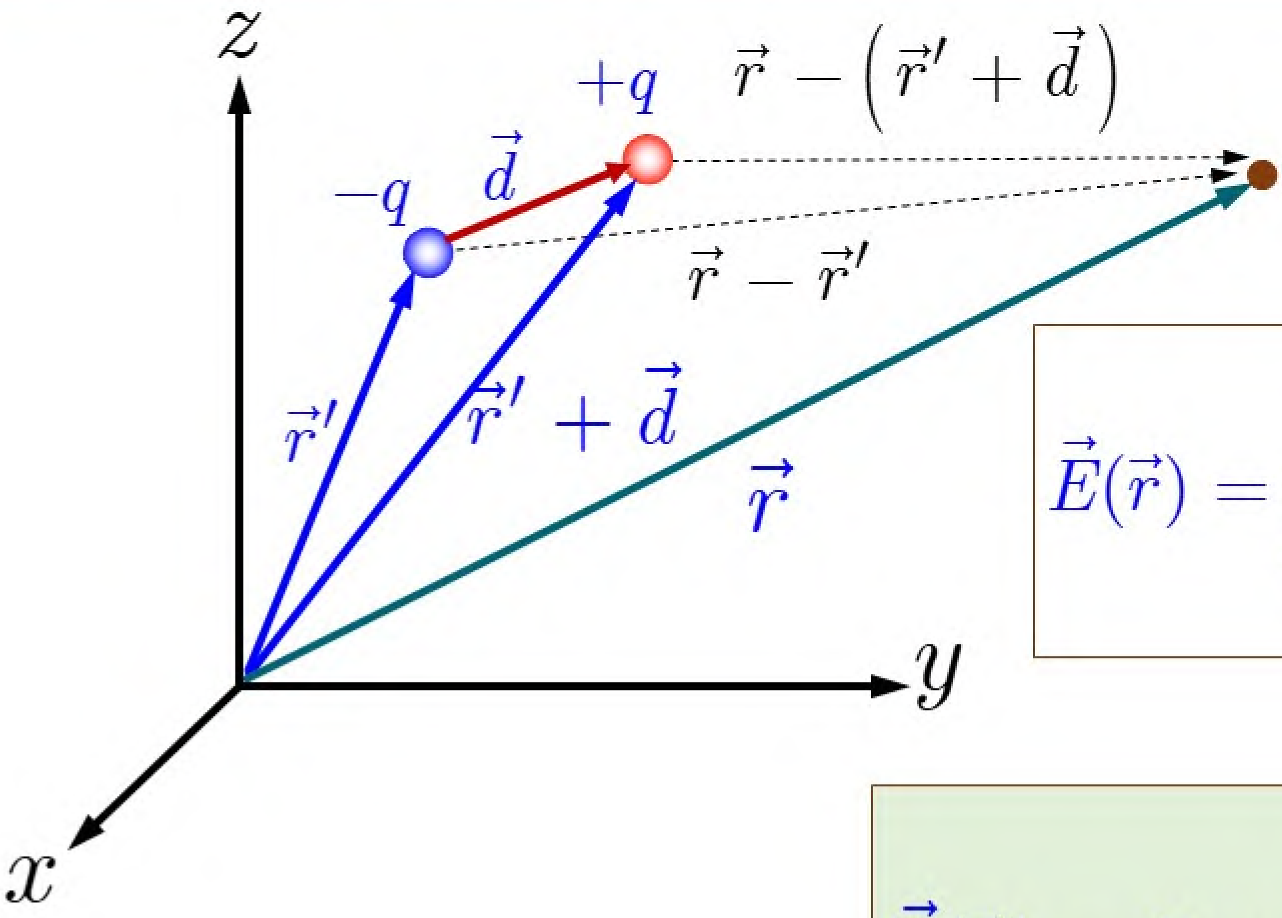
فاینمن

درس نوزدهم

دوقطبی الکتریکی

Electric Dipole

دانشگاه خوارزمی



$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\vec{d}\to 0}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{r}-(\vec{r}\,'+\vec{d})}{\left|\vec{r}-(\vec{r}\,'+\vec{d})\right|^3}-\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\vec{d}\to 0}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')-\vec{d}}{\left|(\vec{r}-\vec{r}\,')-\vec{d}\right|^3}-\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\vec{d}\to 0} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')-\vec{d}}{\left|(\vec{r}-\vec{r}\,')-\vec{d}\right|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right]$$

$$\frac{1}{\left|(\vec{r}-\vec{r}\,')-\vec{d}\right|^3} = \left(\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2 - 2(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{d} + d^2\right)^{-3/2}$$

$$\frac{1}{\left|(\vec{r}-\vec{r}\,')-\vec{d}\right|^3} = \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\left(1 - \frac{2(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{d}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2} + \frac{d^2}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2}\right)^{-3/2}$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x^1 + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{\left|(\vec{r}-\vec{r}\,')-\vec{d}\right|^3} = \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\left(1 + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{d}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3} + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{d}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^5} + \cdots$$

دانشگاه خوارزمی

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\vec{d}\to 0} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')-\vec{d}}{\left|(\vec{r}-\vec{r}\,')-\vec{d}\right|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right]$$

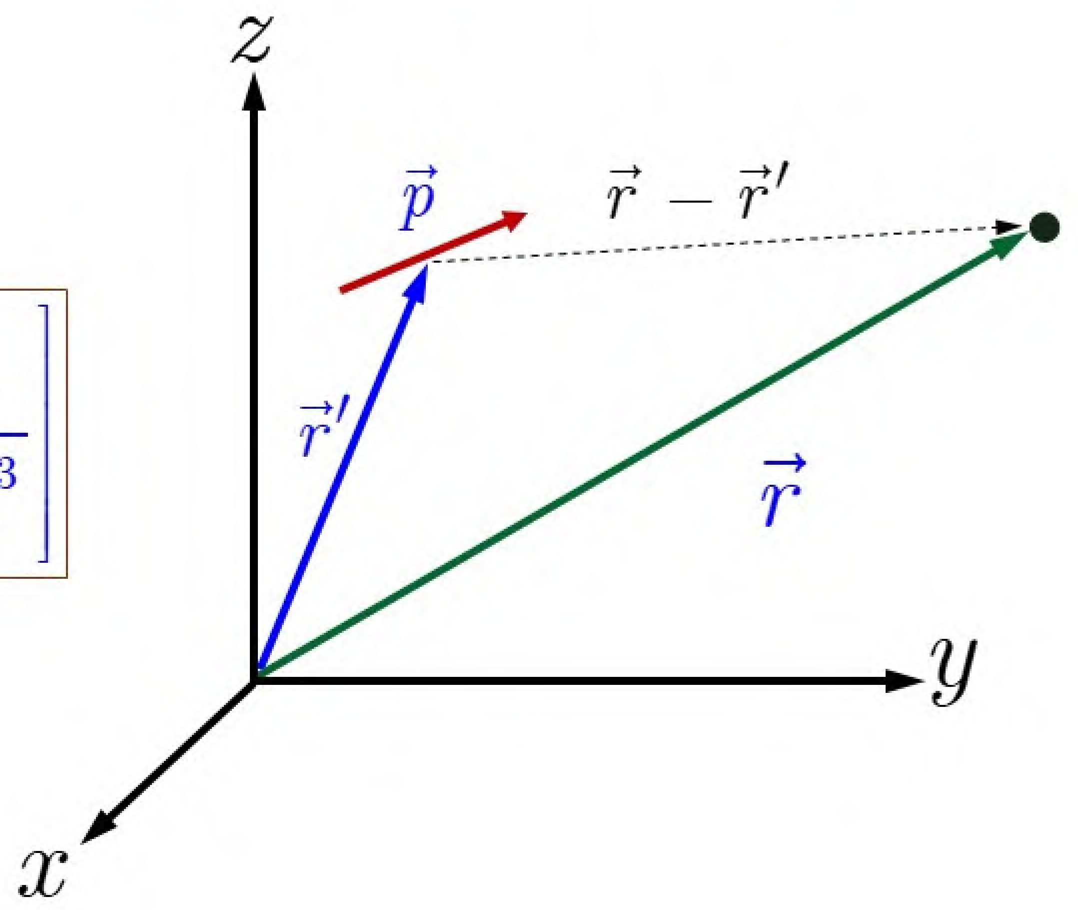
$$\frac{1}{\left|(\vec{r}-\vec{r}\,')-\vec{d}\right|^3} = \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3} + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{d}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^5} + \cdots$$

$$\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')-\vec{d}}{\left|(\vec{r}-\vec{r}\,')-\vec{d}\right|^3} = \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3} - \frac{\vec{d}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3} + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{d}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^5} - \frac{3\vec{d}(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{d}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^5} + \cdots$$

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{d}}$$ گشتاور دو قطبی الکتریکی

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{d}}$$ گشتاور دو قطبی الکتریکی

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\vec{p}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^5}\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) - \frac{\vec{p}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\right]}$$

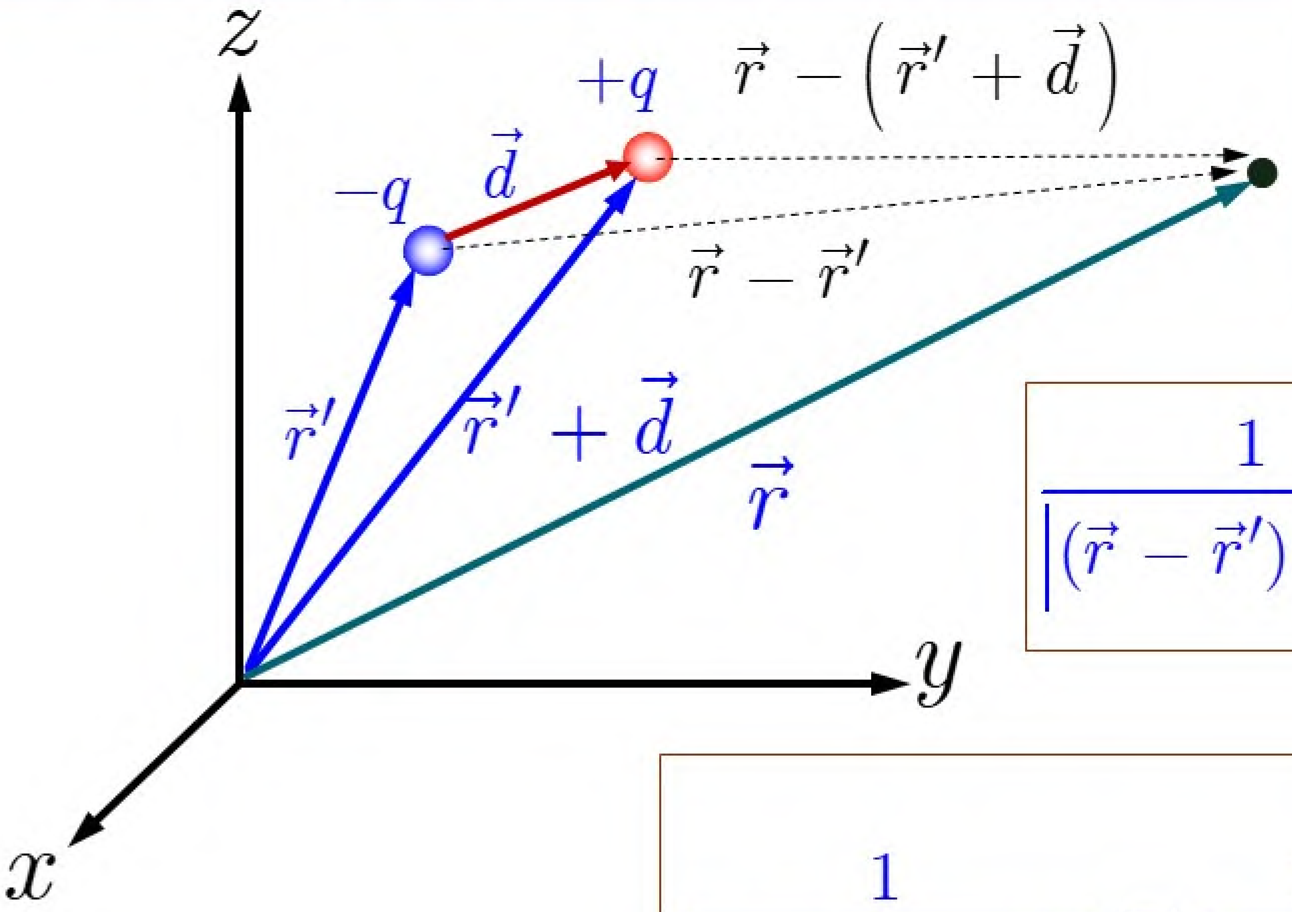


$$f(x+a) = f(x) + \frac{a}{1!}f' + \frac{a^2}{2!}f'' + \frac{a^3}{3!}f''' \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^2}{n!} f^{(n)}(x)$$

$$f(\vec{r}+\vec{a}) = f(\vec{r}) + \vec{a}\cdot\nabla f(\vec{r}) + \frac{1}{2!}(\vec{a}\cdot\nabla)^2 f(\vec{r}) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\vec{a}\cdot\nabla)^n f(\vec{r})$$

$$\frac{1}{|\ \vec{r}+\vec{r}\,'-\vec{d}\ |^3} = \frac{1}{|\ \vec{r}+\vec{r}\,'\ |^3} + (-\vec{d})\cdot\nabla\frac{1}{|\ \vec{r}+\vec{r}\,'\ |^3} + \cdots$$

$$= \frac{1}{|\ \vec{r}+\vec{r}\,'\ |^3} + \frac{3\vec{d}\cdot(\vec{r}+\vec{r}\,')}{|\ \vec{r}+\vec{r}\,'\ |^5} + \cdots$$



$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left|\vec{r} - (\vec{r}\,' - \vec{d})\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}\right]}$$

$$\boxed{\frac{1}{\left|(\vec{r} - \vec{r}\,') - \vec{d}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^2 - 2\vec{d}\cdot(\vec{r} - \vec{r}\,') + d^2}}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\left|(\vec{r} - \vec{r}\,') - \vec{d}\right|} = \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}\left[1 - \frac{2\vec{d}\cdot(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^2} + \frac{d^2}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^2}\right]^{-1/2}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left|\vec{r} - (\vec{r}\,' - \vec{d})\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}\right]$$

$$\frac{1}{|\ \vec{r} - \vec{r}\,' - \vec{d}\ |} = \frac{1}{|\ \vec{r} - \vec{r}\,'\ |} + (-\vec{d}) \cdot\ \nabla \frac{1}{|\ \vec{r} - \vec{r}\,'\ |} + \cdots$$

$$\frac{1}{|\ \vec{r} - \vec{r}\,' - \vec{d}\ |} = \frac{1}{|\ \vec{r} - \vec{r}\,'\ |} + \vec{d} \cdot\ \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\ \vec{r} - \vec{r}\,'\ |^3} + \cdots$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\ \vec{r} - \vec{r}\,'\ |^3}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\;\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}\right) &= \cancelto{0}{\left(\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{p}} + \vec{p}\cdot\vec{\nabla}\,\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}\\ &\quad + \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}\times\cancelto{0}{(\vec{\nabla}\times\vec{p})} + \vec{p}\times\cancelto{0}{\left(\vec{\nabla}\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}\right)}\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}\right)=\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\,\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}$$

$$=p_x\frac{\partial}{\partial x}\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}+p_y\frac{\partial}{\partial y}\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}+p_z\frac{\partial}{\partial z}\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}$$

$$p_x\frac{\partial}{\partial x}\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}=\frac{p_x\hat{i}}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}-\frac{3p_x(x-x')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^5}$$

$$p_y\frac{\partial}{\partial y}\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}=\frac{p_y\hat{j}}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}-\frac{3p_y(y-y')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^5}$$

$$p_z\frac{\partial}{\partial z}\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}=\frac{p_z\hat{k}}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}-\frac{3p_z(z-z')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^5}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right)=\frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}-\frac{3\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}$$

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\vec{p}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^5}\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)-\frac{\vec{p}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right]$$

معادله‌ی خطوط میدان الکتریکی را برای دوقطبی الکتریکی به دست آورید.

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\vec{p}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^5}\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)-\frac{\vec{p}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\right]$$

فرض می‌کنیم دوقطبی در مبدأ مختصات و در راستای محور z قرار دارد. معادله‌ی خطوط میدان را در صفحه‌ی xz (یعنی صفحه‌ی $y=0$) به دست می‌آوریم. در این‌صورت:

$$\vec{E}(x,z)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3pz}{r^5}(x\hat{i}+z\hat{k})-\frac{p\hat{k}}{r^3}\right]$$

$$E_x=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3pxz}{r^5}\qquad E_y=0\qquad E_z=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3pz^2-pr^2}{r^5}$$

دانشگاه خوارزمی

برای پیدا کردنِ معادله‌ی خطوط میدان الکتریکی توجه می‌کنیم که در هر نقطه بر روی این خطوط، میدان الکتریکیِ مماس بر آن است.

$$\vec{E} = \alpha d\vec{l}$$

$$d\vec{l} = dx\hat{i} + dz\hat{k}$$

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dz}{E_z} = \alpha$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3z^2 - r^2}{3xz}$$

$$r^2 = x^2 + z^2$$

$$x^2 dx - 2z^2 dx + xzdz = 0$$

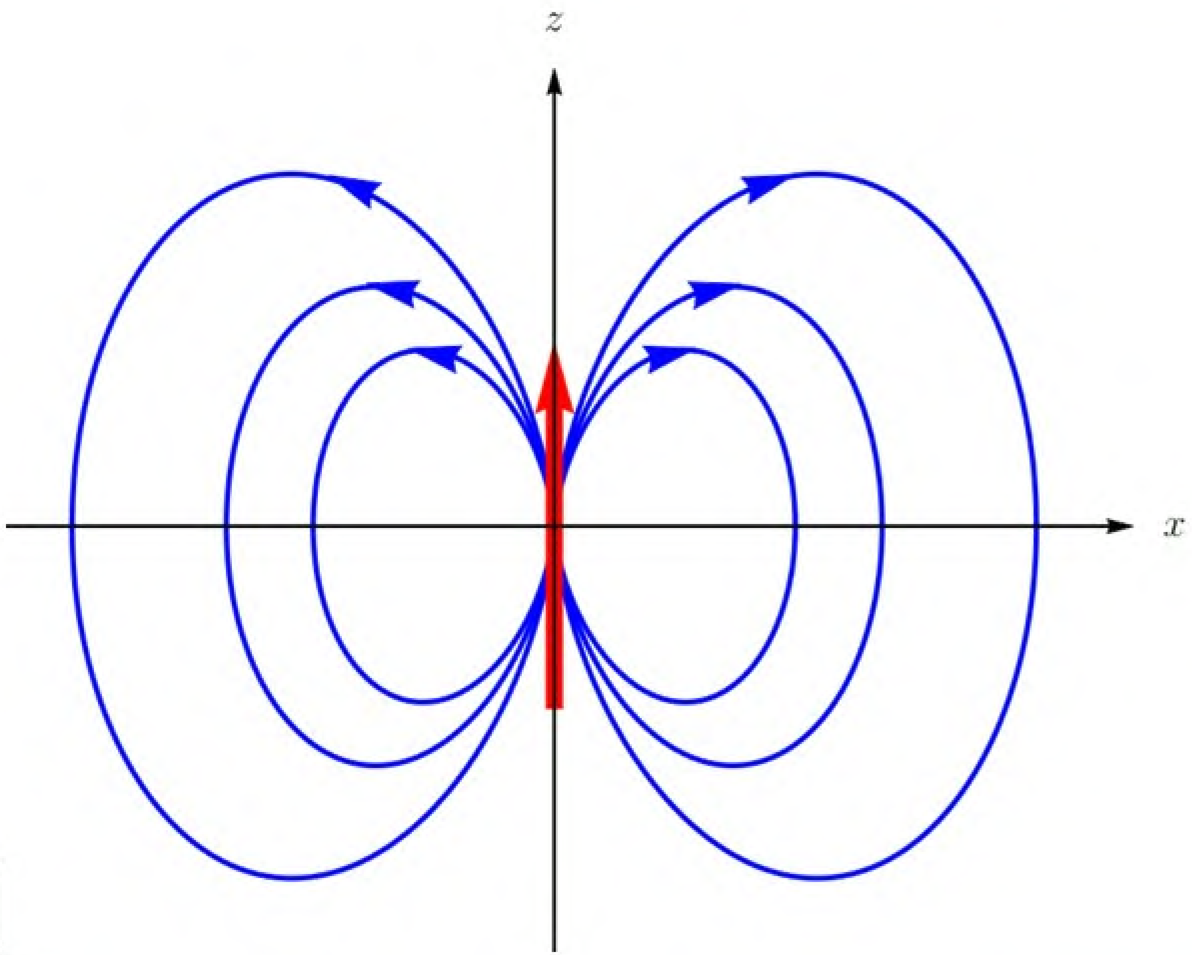
$$\left(\frac{2}{3}\right)x^{-7/3}$$ عامل انتگرال‌ساز این معادله‌ی دیفرانسیل

$$d\left[x^{2/3} + x^{-4/3}z^2\right] = 0 \Rightarrow x^2 + z^2 = cx^{4/3}$$

دانشگاه خوارزمی

به ازای $z=0$ مقادیر ممکن x عبارتند از

$$x = 0, \quad x_m = c^{3/2}$$

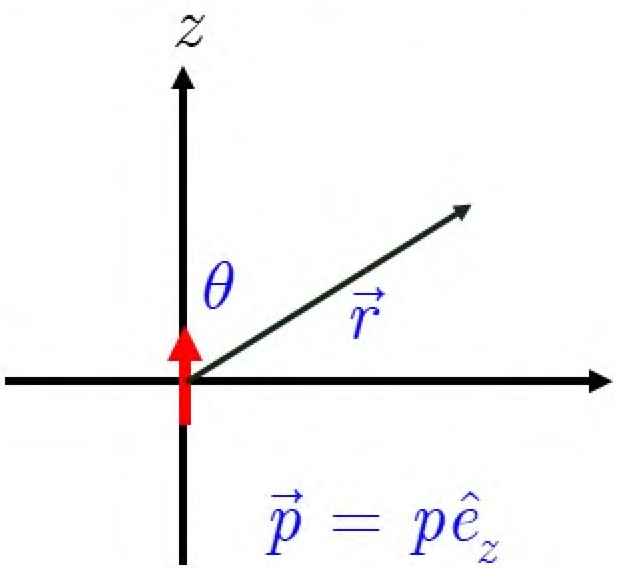


بدین ترتیب معادله‌ی خطوط میدان را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\left(\frac{x}{x_m}\right)^2 + \left(\frac{z}{x_m}\right)^2 = \left(\frac{x}{x_m}\right)^{4/3}$$

دانشگاه خوارزمی

دو قطبی نقطه‌ای در مبدأ مختصات در راستای محور z قرار دارد. نشان دهید:

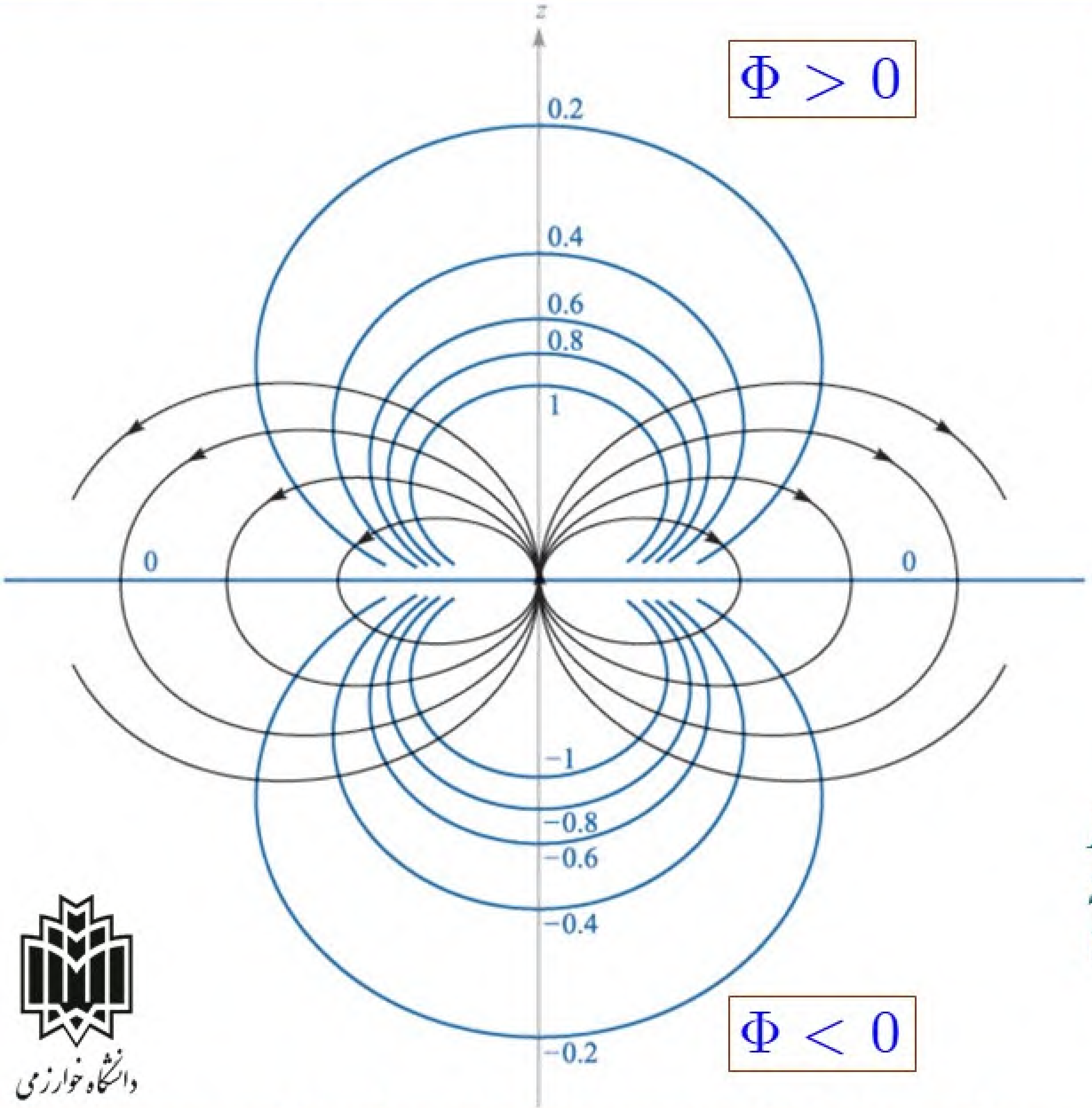


$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\hat{e}_r + \sin\theta\hat{e}_\theta\right)$$

همچنین نشان دهید معادله‌ی سطوح هم پتانسیل و خطوط میدان به ترتیب به صورت زیر است:

$$r = a\sqrt{\cos\theta}$$

$$r = C\sin^2\theta$$



شکل زیر خطوط میدان الکتریکی و سطوح هم‌پتانسیل (بهتر است در این‌جا بگوییم منحنی‌های هم‌پتانسیل) برای یک دوقطبی را نشان می‌دهد.

شکل از کتاب الکترومغناطیس ویلیام هیت

Engineering Electromagnetics
Sixth Edition
William H. Hayt, Jr. . John A. Buc

شاد و مهربان باشید