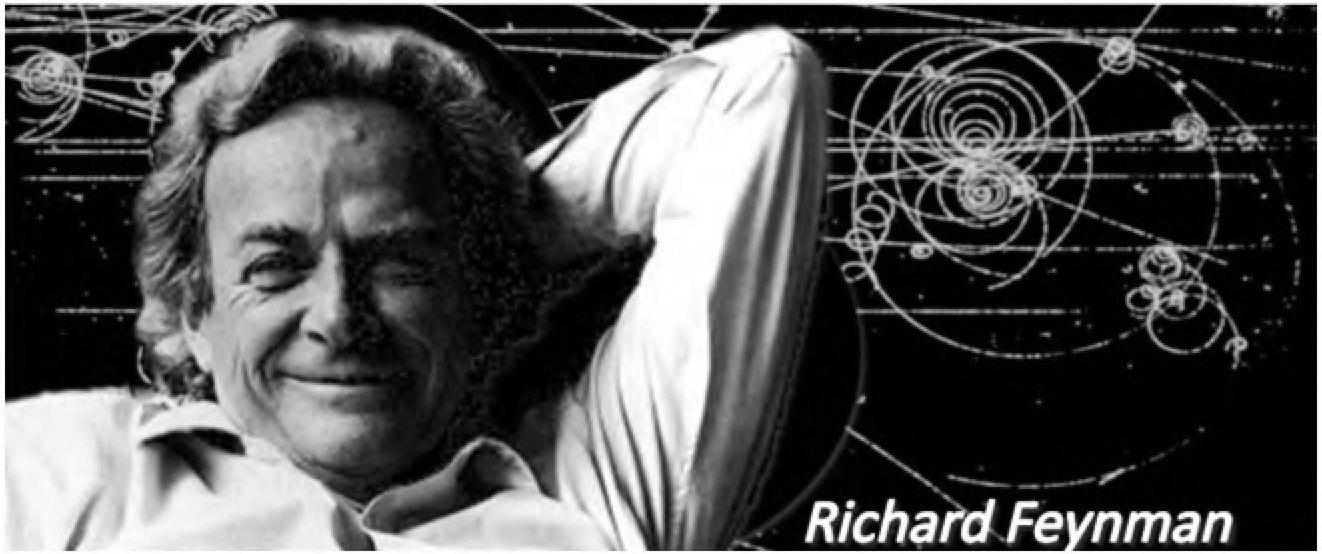
# Electromagnetism I

**Faculty of Physics-Kharazmi University**

**Dr. Faramarz Kanjouri**

**Spring 2023**




**اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید**

**فاینمن**

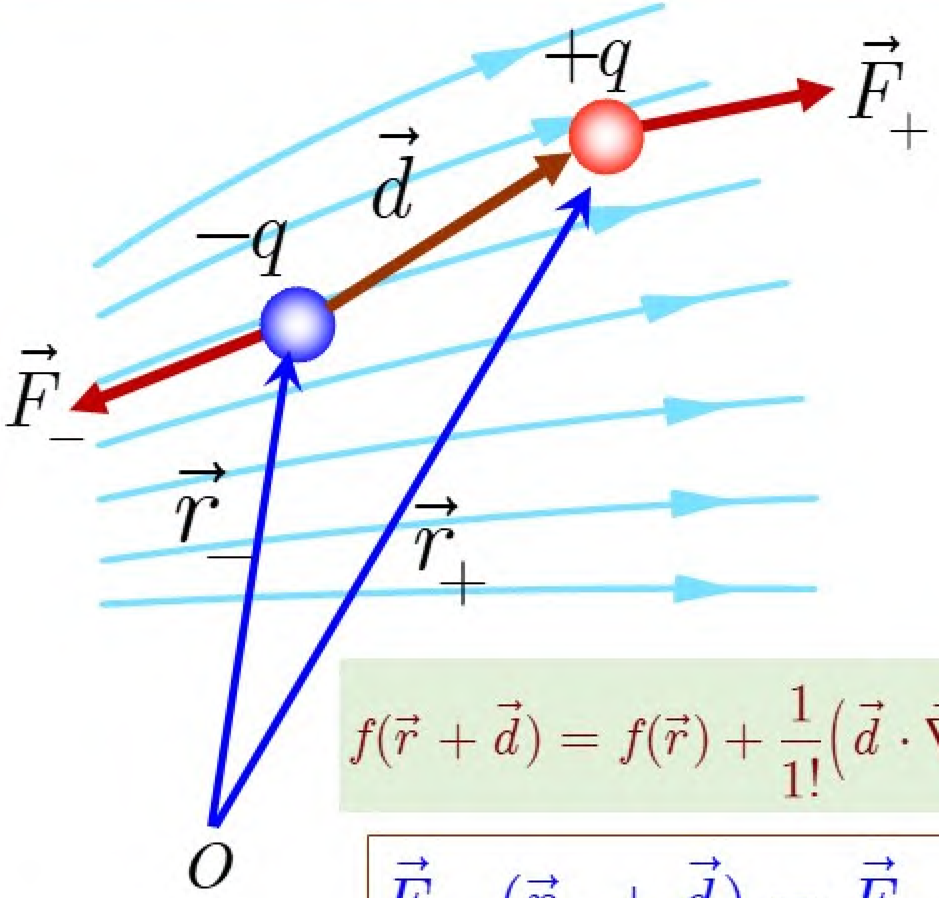
# درس بیستم

# دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی خارجی

# Electric Dipole in an External Electric Field

دانشگاه خوارزمی

## نیروی وارد بر دو قطبی در میدان الکتریکی خارجی




$$\vec{F}_- = -q\vec{E}_{ext}(\vec{r}_-) \qquad \vec{F}_+ = q\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_+)$$

$$\vec{F} = \vec{F}_- + \vec{F}_+ = q\left[-\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_-) + \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_+)\right]$$

$$\vec{F} = q\left[-\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_-) + \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_- + \vec{d})\right]$$

یادآوری بسط تیلور

$$f(\vec{r} + \vec{d}) = f(\vec{r}) + \frac{1}{1!}\left(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\right) f(\vec{r}) + \frac{1}{2!}\left(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\right)^2 f(\vec{r}) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\right)^n f(\vec{r}) + \cdots$$

$$\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_- + \vec{d}) = \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_-) + \vec{d}\cdot\vec{\nabla}\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_-) + \cdots$$

$$if \quad d \to 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = \vec{p}\cdot\vec{\nabla}\vec{E}_{\text{ext}}}$$

$$\boxed{\vec{N} = \left(\vec{r}_- \times \vec{F}_-\right) + \left(\vec{r}_+ \times \vec{F}_+\right) = -q\vec{r}_- \times \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_-) + q\vec{r}_+ \times \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_+)}$$

$$\boxed{\vec{N} \approx -q\vec{r}_- \times \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_-) + q(\vec{r}_- + \vec{d}) \times \left[\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_-) + \vec{d} \cdot \vec{\nabla}\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_-)\right]}$$

یادآوری بسط تیلور

$$f(\vec{r} + \vec{d}) = f(\vec{r}) + \frac{1}{1!}\left(\vec{d} \cdot \vec{\nabla}\right) f(\vec{r}) + \frac{1}{2!}\left(\vec{d} \cdot \vec{\nabla}\right)^2 f(\vec{r}) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\vec{d} \cdot \vec{\nabla}\right)^n f(\vec{r}) + \cdots$$

$$if \quad d \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{N} = \vec{r} \times \vec{p} \cdot \vec{\nabla}\vec{E}_{\text{ext}} + \vec{p} \times \vec{E}_{\text{ext}}}$$

$$\boxed{\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{p} \times \vec{E}_{\text{ext}}}$$

$$\boxed{\vec{N} = \vec{r} \times \left[(\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}_{\text{ext}}\right] + \vec{p} \times \vec{E}_{\text{ext}}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{U = -q\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_-) + q\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_+)}$$

$$\boxed{U = -q\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_-) + q\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_- + \vec{d})}$$

یادآوری بسط تیلور

$$f(\vec{r}+\vec{d}) = f(\vec{r}) + \frac{1}{1!}\left(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\right)f(\vec{r}) + \frac{1}{2!}\left(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\right)^2 f(\vec{r}) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\right)^n f(\vec{r}) + \cdots$$

$$\boxed{U = -q\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_-) + q\left\{\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_-) + \vec{d}\cdot\vec{\nabla}\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_-) + \cdots\right\}}$$

$$if \quad d \to 0 \quad \Rightarrow \quad U = q\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_-)$$

$$\boxed{U = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

دانشگاه خوارزمی

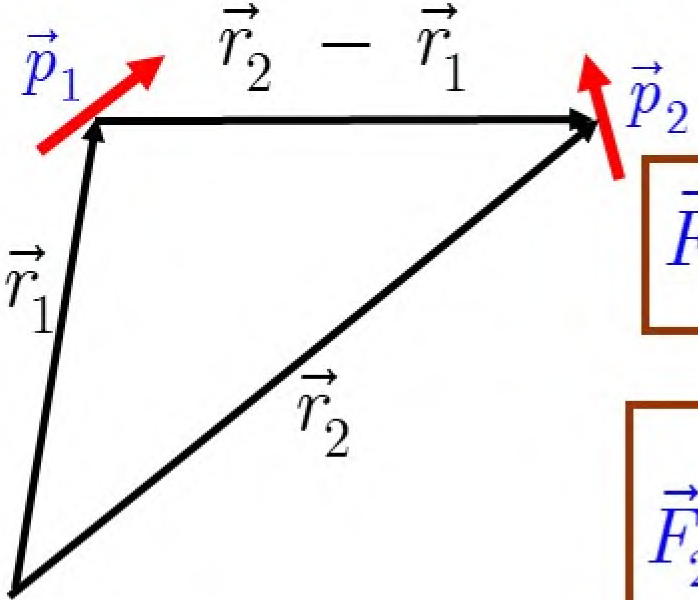
$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}\, U = \vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E})}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\vec{B} + \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) + \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\vec{A}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E}_{\rm ext}) = \cancelto{0}{\vec{p}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}_{\rm ext}\right)} + (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}_{\rm ext}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E}_{\rm ext}) = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}_{\rm ext}}$$

دانشگاه خوارزمی




$$\vec{F}_{21} = \left(\vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}_2\right)\vec{E}_1(\vec{r}_2)$$

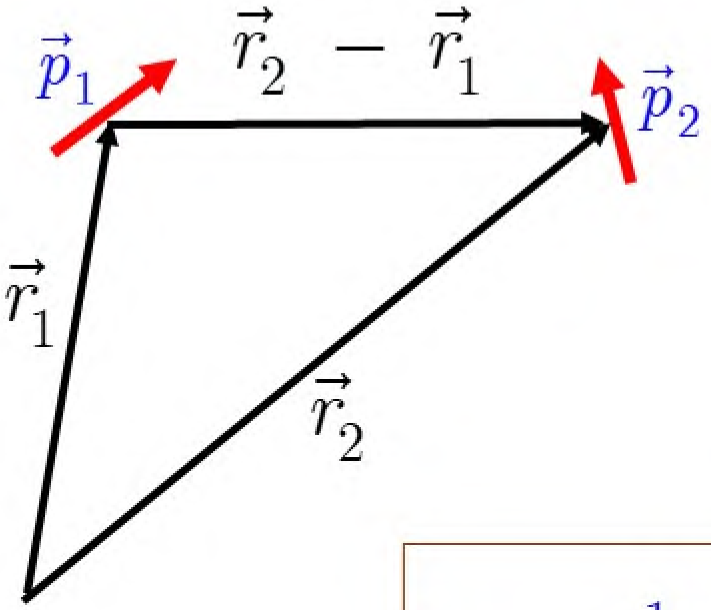
$$\vec{E}_1(\vec{r}_2) = -\vec{\nabla}_2\Phi_1(\vec{r}_2)$$

$$\vec{F}_{21} = (\vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}_2)\left[-\vec{\nabla}_2\Phi_1(\vec{r}_2)\right]$$

$$\Phi(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\ \vec{r}_2 - \vec{r}_1\ |^3}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}_2)\left\{-\vec{\nabla}_2\left(\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\ \vec{r}_2 - \vec{r}_1\ |^3}\right)\right\}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}_2)\left\{\vec{\nabla}_2\left(\vec{p}_1 \cdot \vec{\nabla}_2\frac{1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|}\right)\right\}$$




$$\boxed{U_{21} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(\vec{r}_2)}$$

$$\begin{aligned} U_{21} &= \vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}_2 \Phi_1(\vec{r}_2) \\ &= \vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}_2 \left( \frac{\vec{p}_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} \right) \\ &= \frac{-\vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}_2}{4\pi\varepsilon_0} \left( \vec{p}_1 \cdot \vec{\nabla}_2 \frac{1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|} \right) \end{aligned}$$

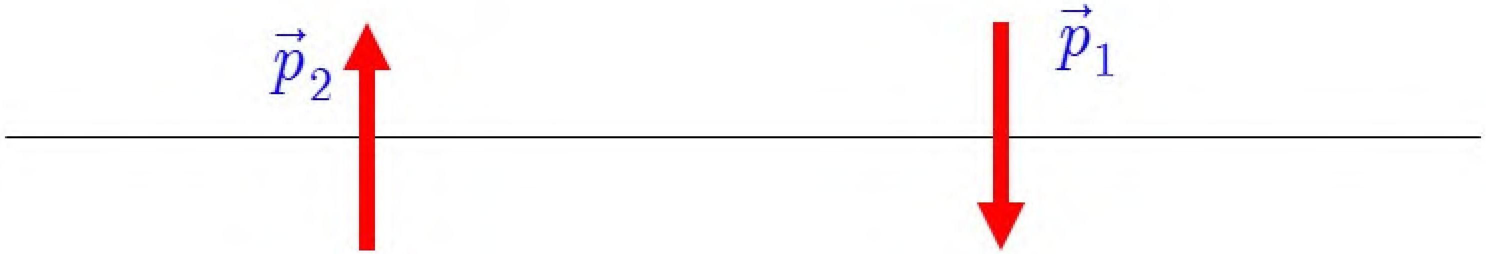
$$\boxed{U_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} - \frac{3}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^5} \left[\vec{p}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\right] \left[\vec{p}_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\right] \right\}}$$

$$\boxed{U_{21} = U_{12}}$$

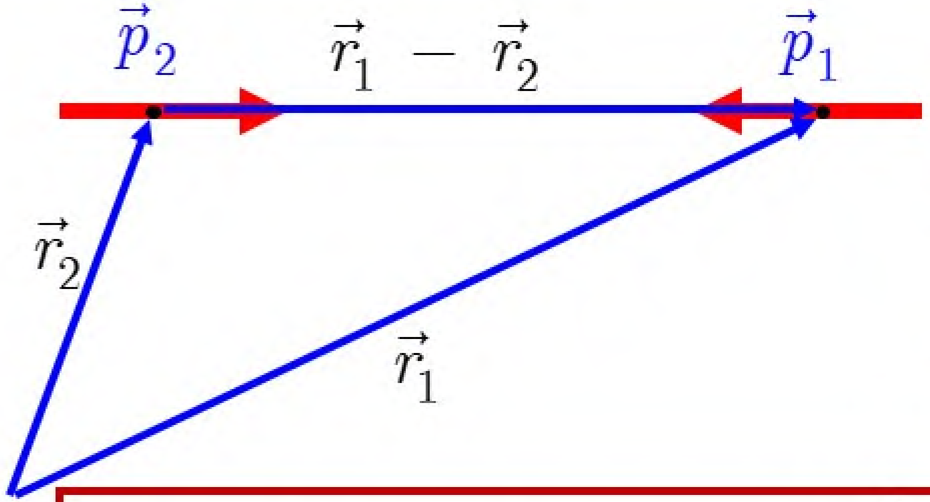
دانشگاه خوارزمی

نیروی بین دو دوقطبی الکتریکی را در هر یک از حالت‌های زیر حساب کنید $\left|\vec{p}_2\right| = \left|\vec{p}_1\right| = p$


الف)




ب)




**الف)** میدانِ الکتریکی ناشی از دوقطبیِ $\vec{p}_2$ در هر نقطه برابر است با:

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{3(\vec{r}-\vec{r}_2)\left[\vec{p}_2\cdot(\vec{r}-\vec{r}_2)\right]}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r}-\vec{r}_2 \mid^5} - \frac{\vec{p}_2}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r}-\vec{r}_2 \mid^3}$$

نیرویِ وارد بر دوقطبیِ $\vec{p}_1$ از طرفِ $\vec{p}_2$ برابر است با:

$$\vec{F}_{12} = \vec{\nabla}_1\left[\vec{p}_1\cdot\vec{E}_2(\vec{r}_1)\right] = \frac{3\vec{p}_1\left[\vec{p}_2\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right]}{\mid \vec{r}_1-\vec{r}_2 \mid^5} + \frac{3\vec{p}_2\left[\vec{p}_1\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right]}{\mid \vec{r}_1-\vec{r}_2 \mid^5}$$

$$- \frac{15\left[\vec{p}_1\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right]\left[\vec{p}_2\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right](\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{\mid \vec{r}_1-\vec{r}_2 \mid^7} + \frac{3(\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2)(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{\mid \vec{r}_1-\vec{r}_2 \mid^5}$$

برای حالت (الف) یعنی وقتی دوقطبی‌ها روبرویِ هم قرار گرفته‌اند، می‌توان نوشت:

$$\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 = -p^2 \qquad \boxed{\vec{p}_1 = -p\,\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{\mid \vec{r}_1-\vec{r}_2 \mid}} \qquad \boxed{\vec{p}_2 = +p\,\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{\mid \vec{r}_1-\vec{r}_2 \mid}}$$

$$\vec{F}_{12} = \vec{\nabla}_1\left[\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_2(\vec{r}_1)\right] = \frac{3\vec{p}_1\left[\vec{p}_2 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5} + \frac{3\vec{p}_2\left[\vec{p}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5}$$

$$- \frac{15\left[\vec{p}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right]\left[\vec{p}_2 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right](\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^7} + \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5}$$

برای حالت (الف) یعنی وقتی دوقطبی‌ها روبرویِ هم قرار گرفته‌اند، می‌توان نوشت:

$$\boxed{\vec{p}_2 = +p\,\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}} \qquad \boxed{\vec{p}_1 = -p\,\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}} \qquad \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = -p^2$$

با جاگذاری در رابطه‌ی بالا، نیروی وارد بر دوقطبیِ $\vec{p}_1$ به شکلِ زیر به دست می‌آید:

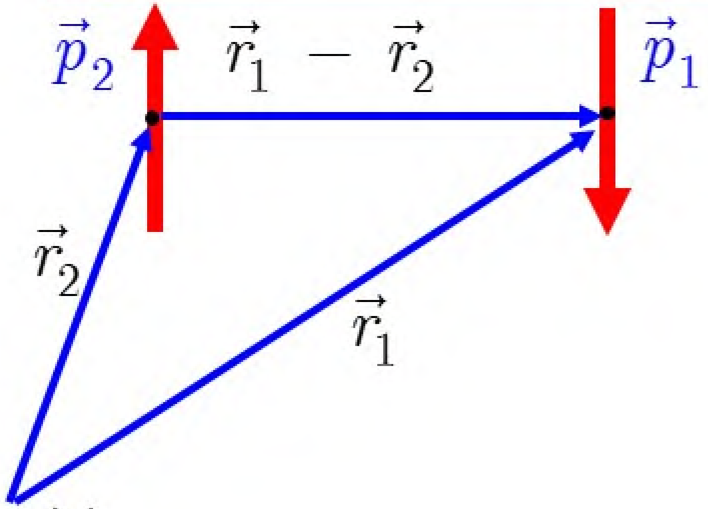
$$\vec{F}_{12} = 6\,p^2\,\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5}$$

این نیرو بینِ دوقطبی‌ها دافعه است

دانشگاه خوارزمی

$$\vec{F}_{12} = \vec{\nabla}_1\left[\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_2(\vec{r}_1)\right] = \frac{3\vec{p}_1\left[\vec{p}_2 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5} + \frac{3\vec{p}_2\left[\vec{p}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5}$$

$$- \frac{15\left[\vec{p}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right]\left[\vec{p}_2 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right](\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^7} + \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5}$$




ب) برای حالت (ب) که دوقطبی‌ها بر خطِ واصل‌شان عمود هستند می‌توان نوشت:

$$\vec{p}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{p}_2 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0$$

$$\vec{F}_{12} = -3p^2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5}$$

این نیرو بینِ دوقطبی‌ها جاذبه است

# شاد و مهربان باشید