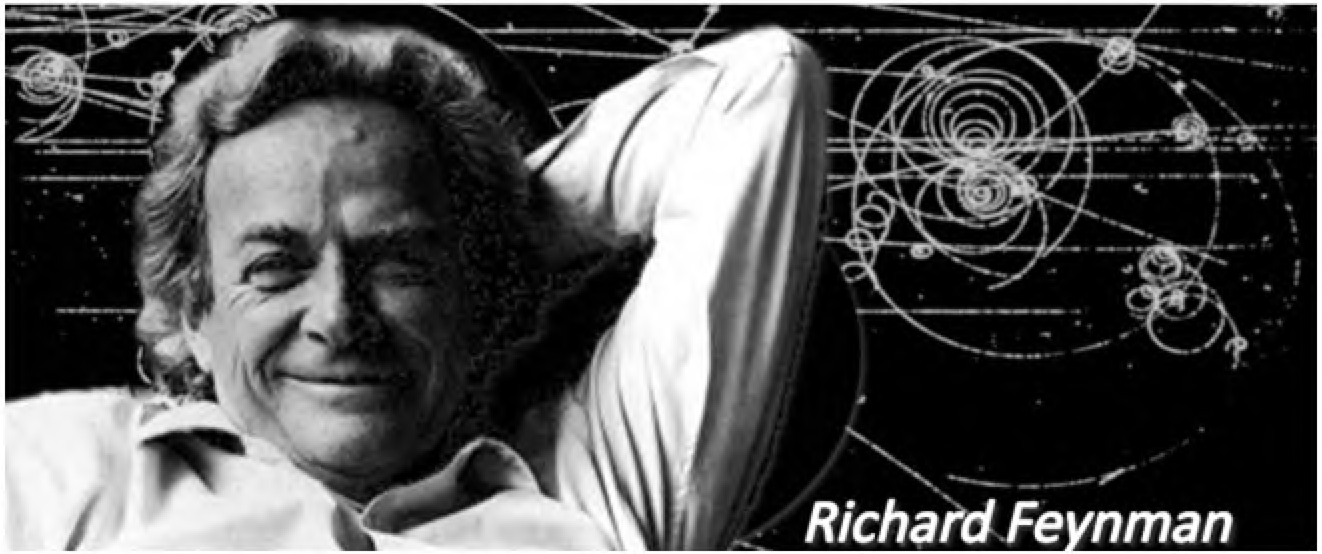
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

دانشگاه خوارزمی

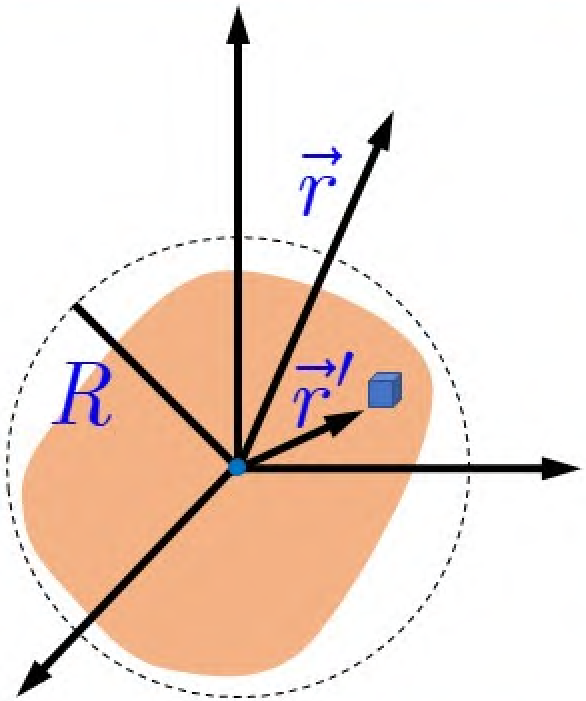
درس بیست و یکم

بسط چند قطبی پتانسیل الکتریکی

Multipole Expansion of the Electrostatic Potential

دانشگاه خوارزمی

یک توزیع بار **جایگزیده** داریم. می‌خواهیم پتانسیل الکتریکی ناشی از آن را بر حسب چندقطبی‌ها بسط دهیم.



$$\rho(\vec{r}') = 0; \qquad \left|\vec{r}'\right| > R$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\,dv'$$

$$|\ \vec{r} - \vec{r}'\ | = \sqrt{r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' + r'^2} = r\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}$$

$$\frac{1}{|\ \vec{r}-\vec{r}'\ |} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1+\epsilon)^m = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!}{n!(m-n)!}\epsilon^n = 1 + \frac{m}{1!}\epsilon + \frac{m(m-1)}{2!}\epsilon^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\epsilon^3 + \ldots$$

$$\epsilon = -2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2$$

$$\frac{1}{|\ \vec{r}-\vec{r}'\ |} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \ldots\right)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\rho(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5}\left[3\left(\vec{r}\cdot\vec{r}'\right)^2 - r^2r'^2\right] + O\left(\frac{r'}{r}\right)^3\right)dv'$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\rho(\vec{r}')\left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5}\left(3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2 - r^2 r'^2\right) + O\left(\frac{r'}{r}\right)^3\right)dv'$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\int_V \rho(\vec{r}')dv' + \frac{\vec{r}\cdot}{4\pi\epsilon_0 r^3}\int_V \vec{r}'\rho(\vec{r}')dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5}\frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r}')\left[3\left(\vec{r}\cdot\vec{r}'\right)^2 - r^2 r'^2\right]dv' + \cdots$$

$$q_{tot} = \int_V \rho(\vec{r}')dv'$$

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}'\rho(\vec{r}')dv'$$

$$\left(\vec{r}\cdot\vec{r}'\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i x_i'\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i x_i'\right)\left(\sum_{i=j}^{3} x_j x_j'\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j x_i' x_j'$$

$$r'^2 r^2 = r'^2\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right) = r'^2\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{i=j}^{3}\delta_{ij} x_i x_j\right)$$

$$3\left(\vec{r}\cdot\vec{r}'\right)^2 - r'^2 r^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j\left(3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2\right)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{x_i x_j}{r^5}Q_{ij} + \cdots$$

$$Q_{ij} = \int_V \left(3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2\right)\rho(\vec{r}')dv'$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{x_i x_j}{r^5}Q_{ij} + \cdots$$

$$q_{tot} = \int_V \rho(\vec{r}')dv'$$

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}'\rho(\vec{r}')dv'$$

$$Q_{ij} = \int_V \left(3x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2\right)\rho(\vec{r}')dv'$$

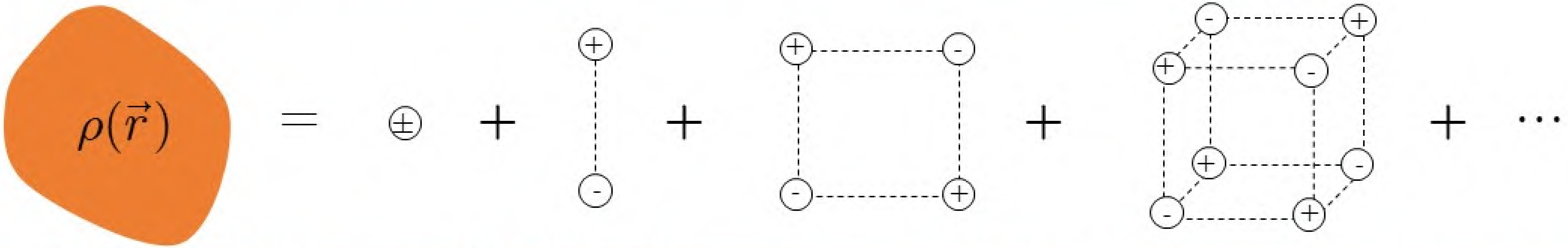
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$$

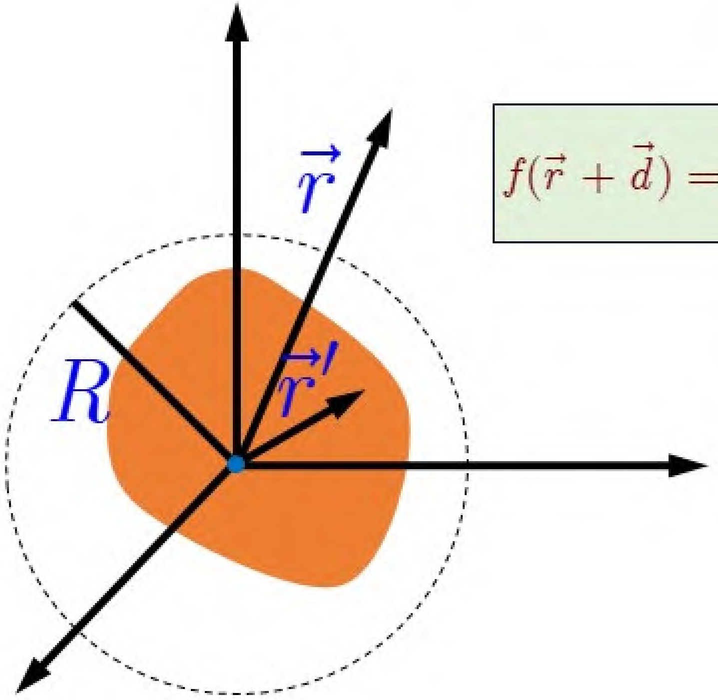
$$Q_{ij} = Q_{ji}$$

پتانسیل الکتریکی را می‌توان به صورت حاصل جمع سهم‌های تک قطبی، دوقطبی، چهارقطبی و ... نوشت.

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \Phi^{(3)} + \cdots$$



یک توزیع بار جایگزیده داریم. می‌خواهیم پتانسیل الکتریکی ناشی از آن را برحسب چندقطبی‌ها بسط دهیم.



$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv'$$

یادآوری بسط تیلور

$$f(\vec{r}+\vec{d}) = f(\vec{r}) + \frac{1}{1!}\left(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\right)f(\vec{r}) + \frac{1}{2!}\left(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\right)^2 f(\vec{r}) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\right)^n f(\vec{r}) + \cdots$$

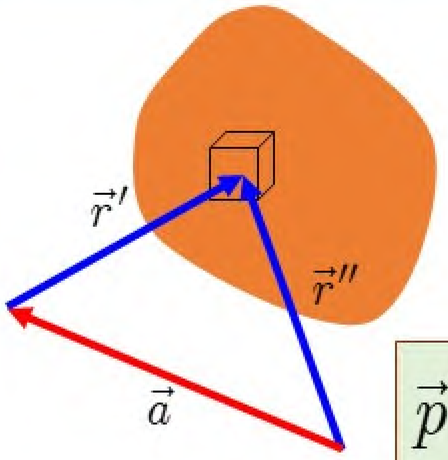
$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}'\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{r}'\cdot\vec{\nabla}\right)^2\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots$$

$$-\left(\vec{r}'\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{r}'\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\frac{1}{2}\left(\vec{r}'\cdot\vec{\nabla}\right)^2\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j\,\frac{3x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2}{r^5}$$

$$\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\rho(\vec{r}')}{r} + \rho(\vec{r}')\vec{r}'\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\rho(\vec{r}')\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j\,\frac{3x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2}{r^5} + \cdots$$

در حالت کلی مقدار گشتاورهای چند قطبی به انتخاب مبدأ مختصات بستگی دارد.



الف) تک قطبی: به مبدأ بستگی ندارد

$$q_{tot} = \int_V \rho(\vec{r}')dv'$$

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}'\rho(\vec{r}')dv'$$

ب) دوقطبی: ؟

$$\vec{p}' = \int_V \vec{r}''\rho(\vec{r}')dv' = \int_V \left(\vec{r}' + \vec{a}\right)\rho(\vec{r}')dv'$$

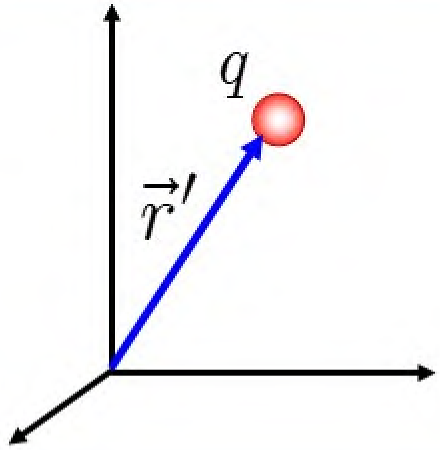
$$\vec{p}' = \int_V \vec{r}'\rho(\vec{r}')dv' + \vec{a}\int_V \rho(\vec{r}')dv'$$

$$\vec{p}' = \vec{p} + \vec{a}q_{tot}$$

اگر بارِ کل صفر باشد، گشتاور دو قطبی به مبدأ بستگی ندارد.

در مورد چهار قطبی، در صورتی گشتاور چهار قطبی به مبدأ بستگی نخواهد داشت که هم بارِ کل و هم گشتاور دوقطبی صفر باشند

۱ - بار نقطه‌ای

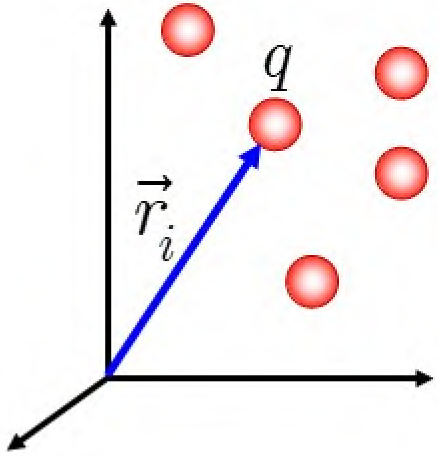


$$\boxed{\vec{p} = q\vec{r}'}$$

اگر بارِ نقطه‌ای در مبدأ مختصات باشد گشتاور دوقطبی آن صفر است

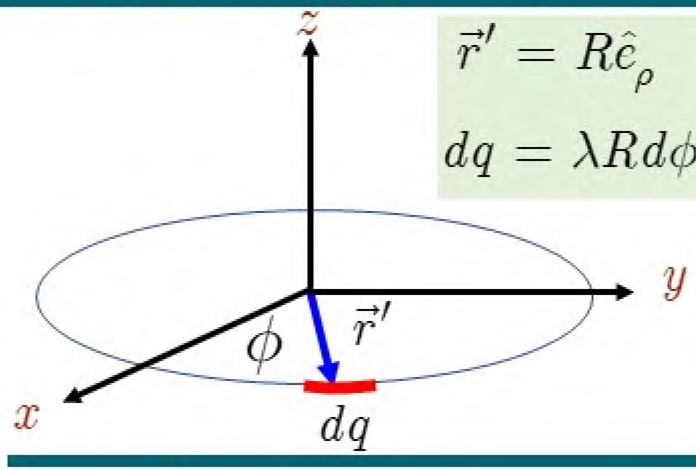
---

۲ - مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای



$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{r}_i$$

۳- حلقه‌ی باردار

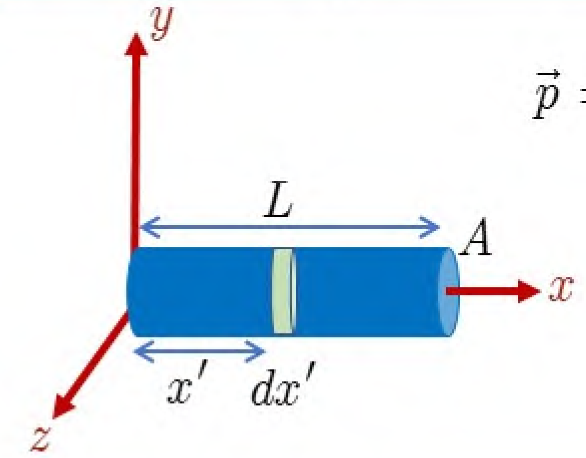


$$\vec{r}' = R\hat{e}_\rho$$

$$dq = \lambda R d\phi$$

$$\vec{p} = \int dq\vec{r}' = \int \lambda R d\phi R\hat{e}_\rho = \lambda R^2 \int d\phi \hat{e}_\rho = 0$$

۴- میله‌ی باردار با چگالی $\rho = \rho_0\left(\frac{x}{L} - 1\right)$



$$\vec{p} = \int dq\vec{r}' = \hat{i}\int_{x=0}^{x=L} x'\rho(x')A\,dx'$$

$$= \hat{i}A\int_{x=0}^{x=L} x'\rho_0\left(\frac{x'}{L} - 1\right)dx'$$

$$= -\frac{1}{6}AL^2\rho_0\hat{i}$$

۵- پوسته‌ی کروی با چگالی سطحی $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$

لطفا خودتان حل کنید!

$$\vec{p} = \int dq\vec{r}' = \cdots = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_0 \hat{e}_z$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی