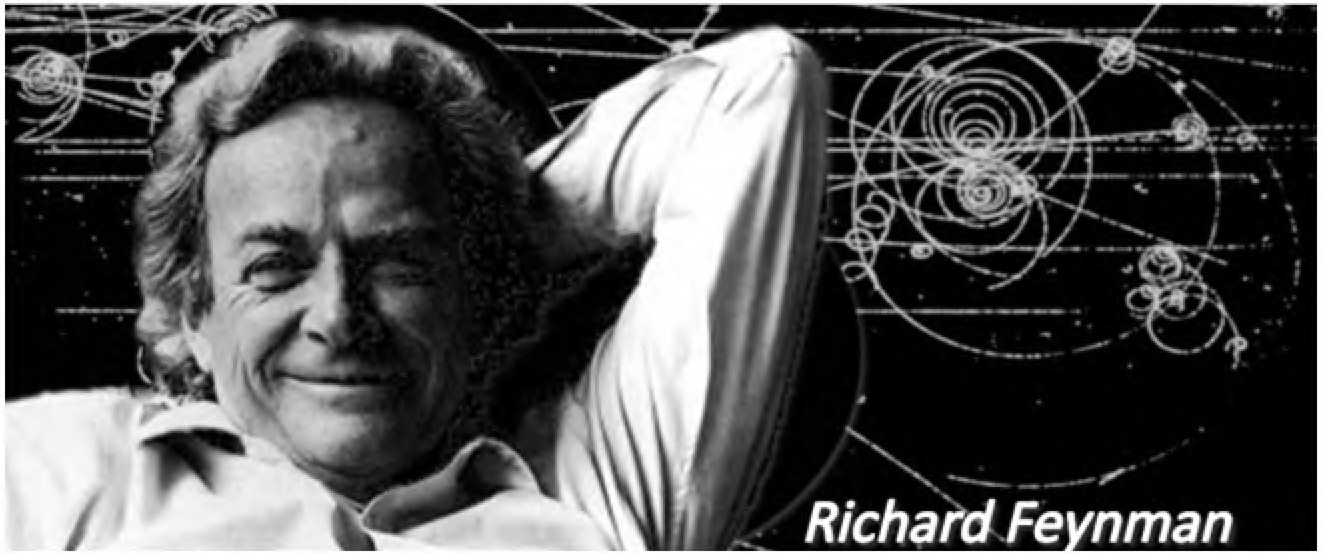
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

دانشگاه خوارزمی

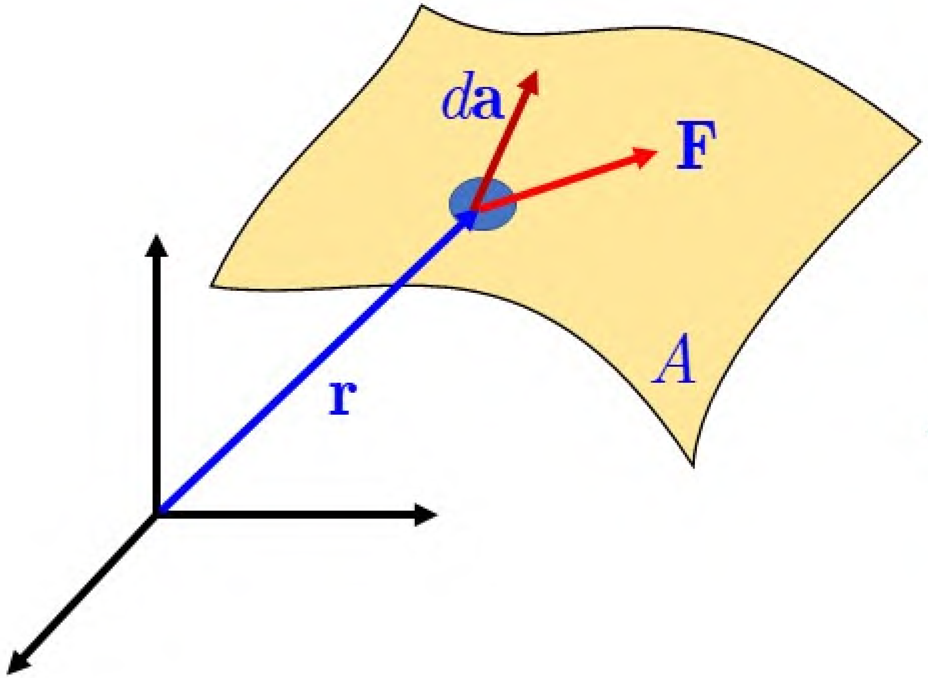
درس بیست و دوم

قانون گوس

Gauss' Law

دانشگاه خوارزمی

فرض کنید $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ یک میدانِ برداری و $d\mathbf{a}$ بردارِ سطحِ یک عنصرِ سطح باشد. شارِ میدانِ $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ عبوری از عنصرِ سطحِ da به شکلِ زیر تعریف می‌شود:



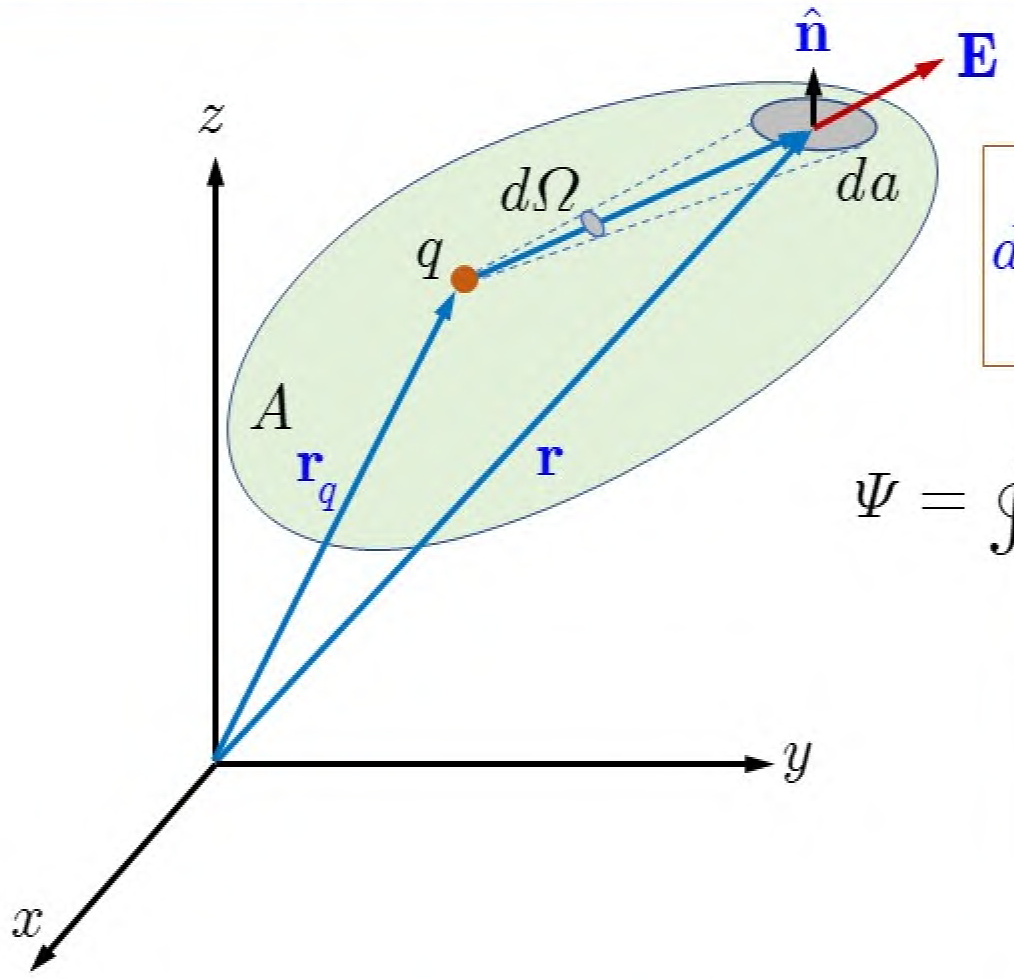
$$d\Psi_F = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da$$

که یک کمیت نرده‌ای است. در این‌جا $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح در نقطه‌ی $\mathbf{r}$ است. برای یک مساحتِ دلخواهِ A شارِ کل با انتگرال‌گیری بر روی این سطح به دست می‌آید:

$$\Psi_F = \int_A \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da$$

بدین ترتیب در موردِ شار میدانِ الکتریکی روی سطح A می‌توان نوشت:

$$\Psi_E = \int_A \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da$$



$$d\Psi = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da$$

$$d\Psi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_q}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}_q\,|^3}\cdot\hat{\mathbf{n}}da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}d\Omega$$

$$\Psi = \oint_A \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oint\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_q}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}_q\,|^3}\cdot\hat{\mathbf{n}}da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oint d\Omega$$

$$\oint_A d\Omega = \begin{cases} 4\pi & \text{اگر نقطه‌ی مشاهده درون سطح } A \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر نقطه‌ی مشاهده خارج سطح } A \text{ باشد} \end{cases}$$

$$\oint_A \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da = \begin{cases} \dfrac{q}{\epsilon_0} & \text{اگر بار } q \text{ درون سطح } A \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر بار } q \text{ خارج سطح } A \text{ باشد} \end{cases}$$

این همان قانون گوس است.

دانشگاه خوارزمی

اگر درونِ سطحِ A چندین بارِ نقطه‌ای داشته باشیم، با توجه به اصل برهم‌نهی می‌توان نوشت:

$$\oint_A \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da = \oint_A \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i \cdot\hat{\mathbf{n}}da = \sum_{i=1}^{N}\oint_A \mathbf{E}_i \cdot\hat{\mathbf{n}}da = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N'} q_i$$

و به راحتی قابل تعمیم به توزیع‌های پیوسته‌ی بار است:

$$\oint_A \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho_v(\mathbf{r})dv$$

قانونِ گوس از معادلات اساسیِ الکتروستاتیک است که نتیجه‌ای است از ویژگی‌های میدانِ الکتریکی:

- میدانِ الکتریکی یک میدانِ مرکزی است.
- میدانِ الکتریکی عکسِ مجذوری است (نسبت به فاصله).
- اصلِ برهم‌نهی برایِ آن برقرار است.

از آن‌جا که میدانِ گرانشی نیز همین ویژگی ها را دارد، این قانون برای میدانِ گرانشی نیز برقرار است.

برای مسائلی که تقارنِ زیادی دارند، با استفاده از شکلِ انتگرالیِ قانونِ گوس می‌توان میدانِ الکتریکی را محاسبه کرد.

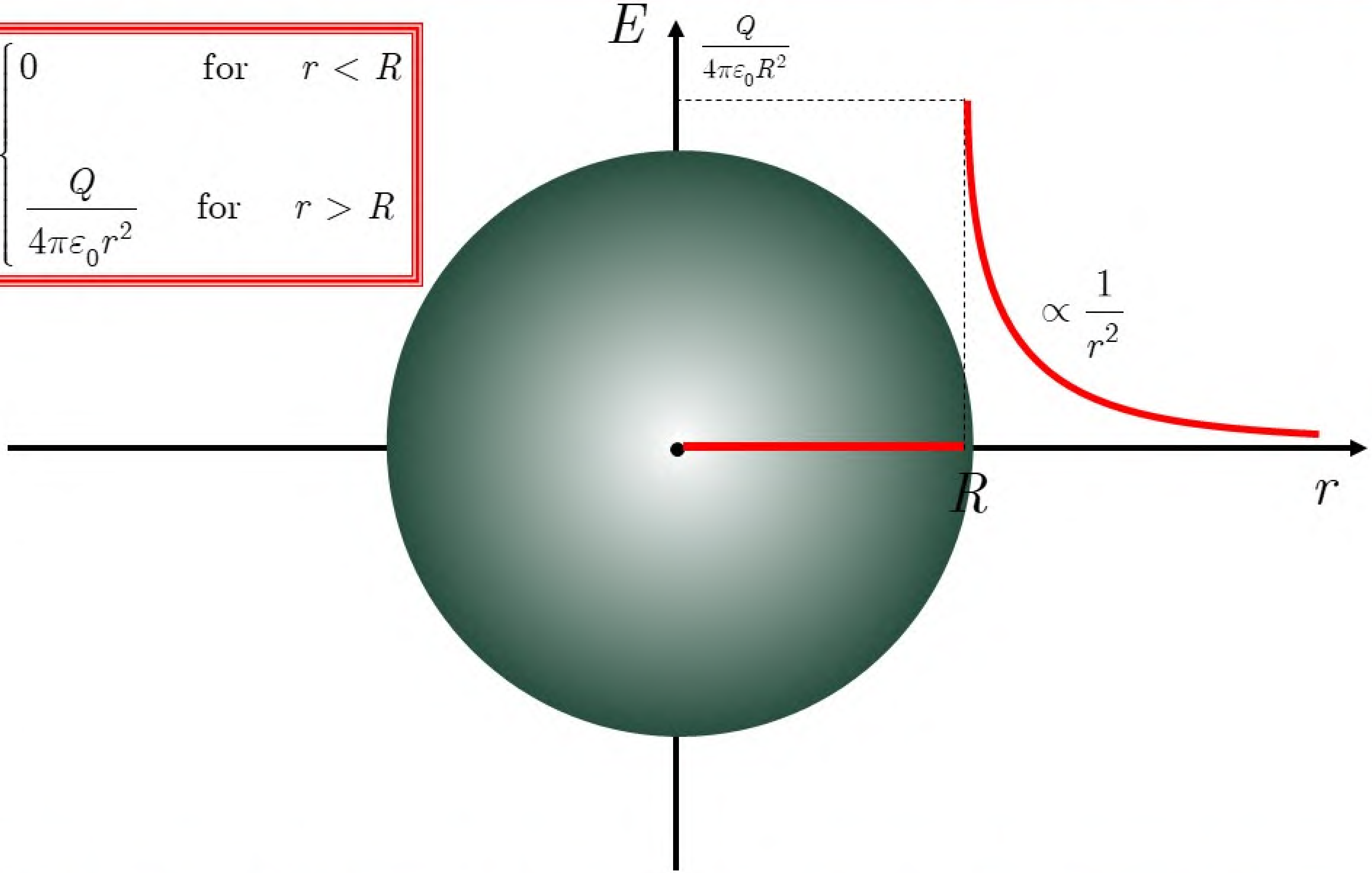
لطفا درس‌نامه‌های شماره ۱۴ و ۱۵ درس فیزیک پایه ۲ را که در مورد قانون گوس است، مشاهده کنید. مطالب ذکر شده در آن درس‌نامه‌ها را این‌جا تکرار نمی‌کنم. اما لازم است حتما بلد باشید.

تمام این مطالب در درس فیزیک پایه ۲ با جزئیات بحث شده است

- ❑ محاسبه‌ی میدان الکتریکی ناشی از یک **بار نقطه‌ای**
- ❑ محاسبه‌ی میدان الکتریکی ناشی از یک **توزیع بار کروی**
- ❑ محاسبه‌ی میدان الکتریکی ناشی از یک **میله‌ی باردار یکنواخت به طول بی‌نهایت**
- ❑ محاسبه‌ی میدان الکتریکی ناشی از یک **توزیع بار استوانه‌ای**
- ❑ محاسبه‌ی میدان الکتریکی ناشی از یک **ورقه‌ی باردار یکنواخت با ابعاد بی‌نهایت**
- ❑ محاسبه‌ی میدان الکتریکی روی **سطح رساناها**

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{E=\begin{cases}0 & \text{for} \quad r<R \\ \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{for} \quad r>R\end{cases}}$$

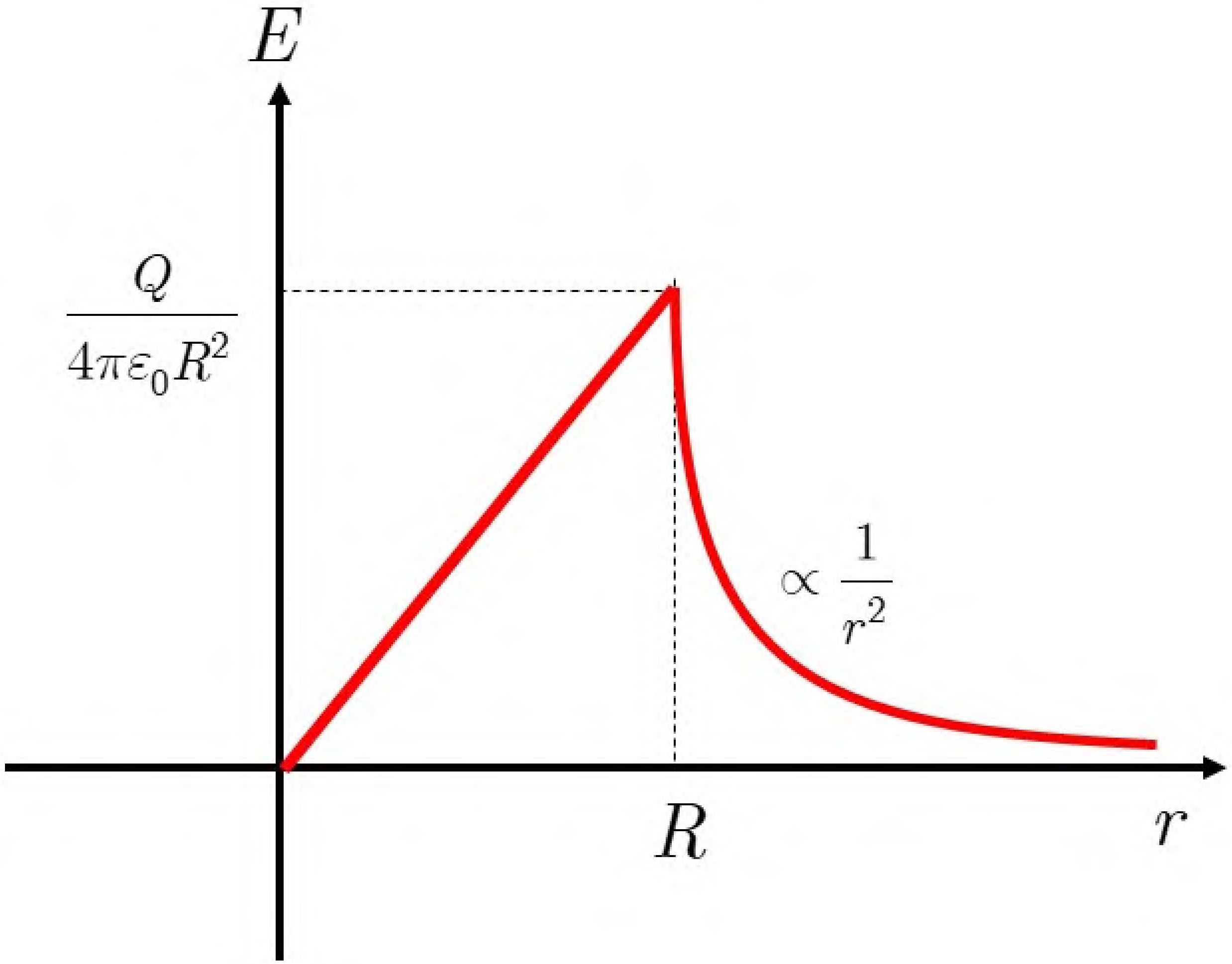


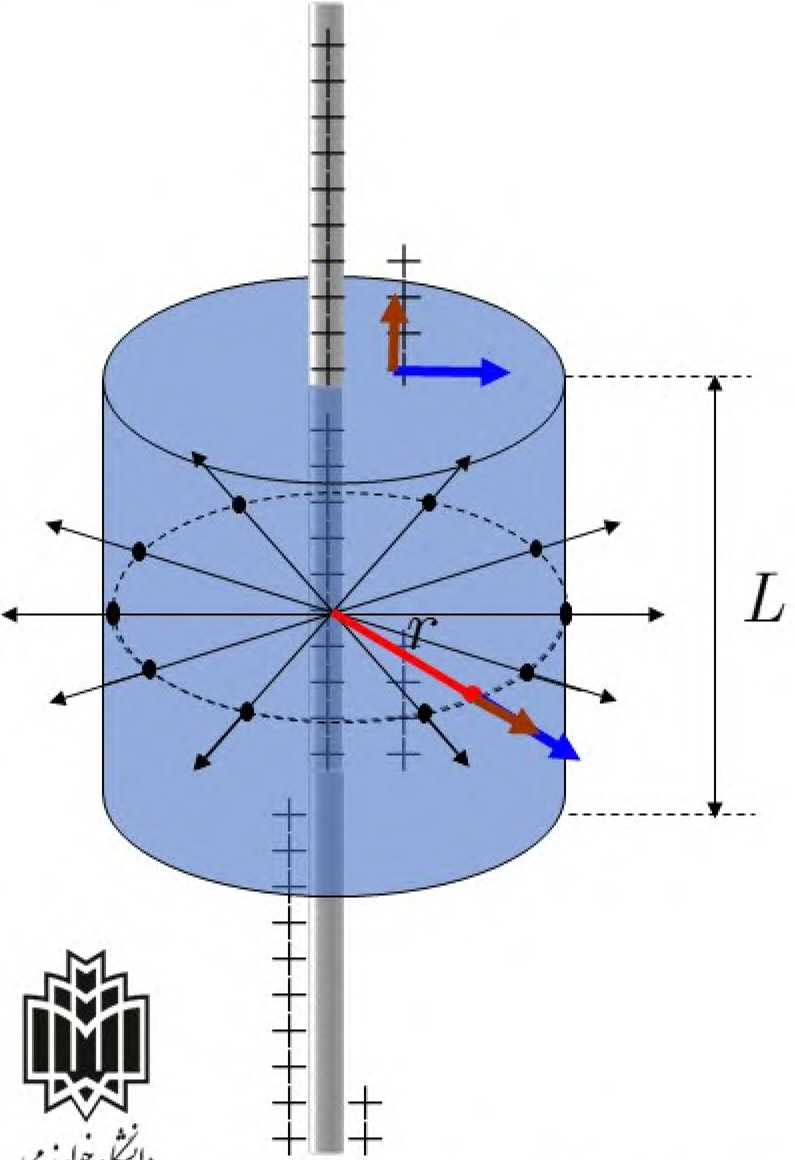
برجسب چگالی بار

$$E = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} & r \le R \\[2ex] \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} & r \ge R \end{cases}$$

برجسب بار کل

$$E = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & r \le R \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r \ge R \end{cases}$$





بار الکتریکی بر روی یک میله‌ی نازک به طول بی نهایت به طور یکنواخت با چگالی λ توزیع شده است. میدان الکتریکی را در فاصله‌ی r از میله پیدا کنید.

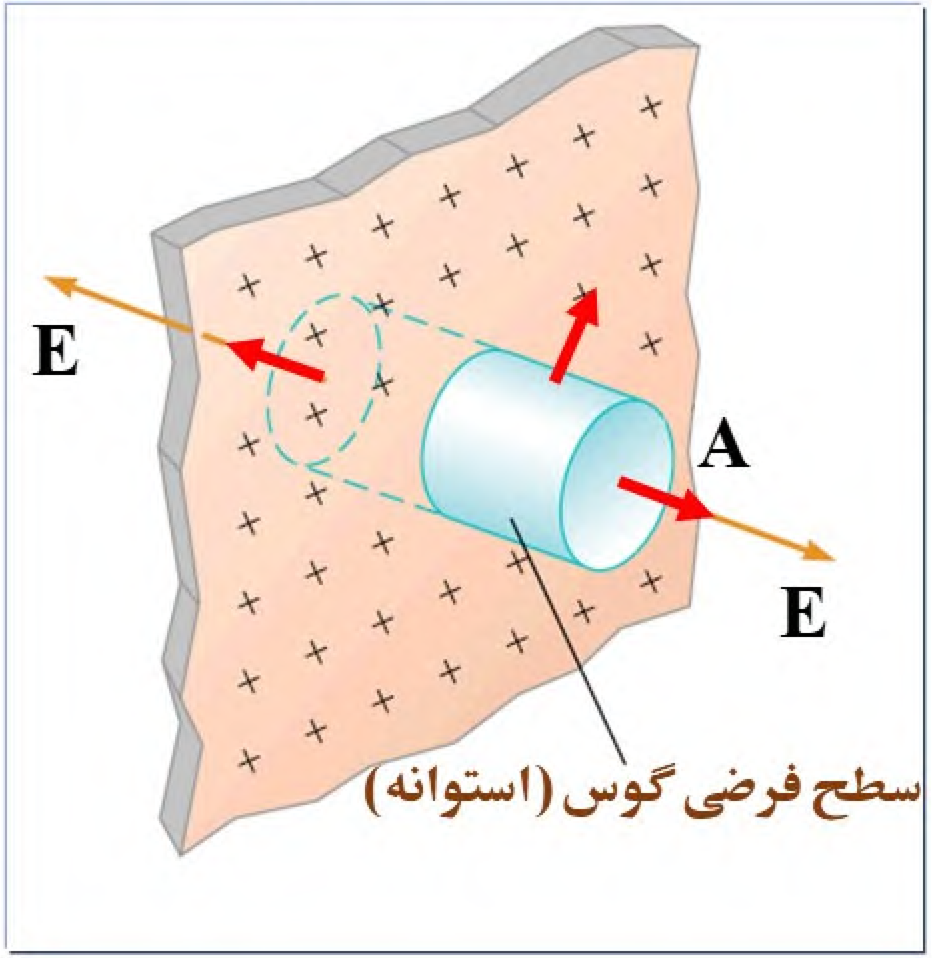
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\int E da \cos(90^0) + \int E da \cos(90^0) + \int E da \cos(0^0) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$E \int da = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow E\left(2\pi r L\right) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \, r}}$$

میدان الکتریکی ناشی از یک ورقه‌ی باردار بی نهایت با چگالی بار یکنواخت

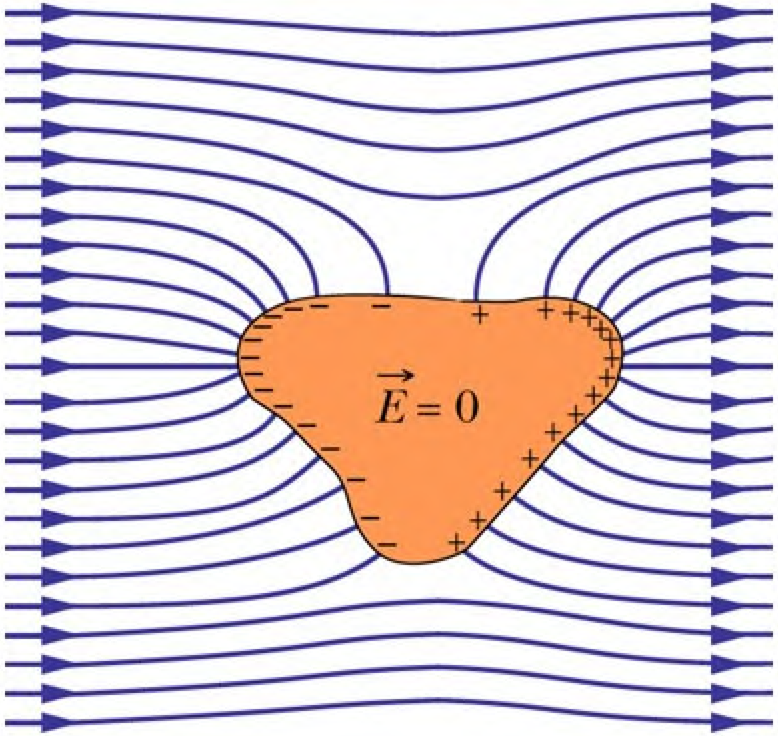


$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\sigma \mathrm{A}}{\varepsilon_0}$$

$$\int E da \cos(0^0) + \int E da \cos(0^0) + \int E da \cos(90^0) = \frac{\sigma \mathrm{A}}{\varepsilon_0}$$

$$EA + EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

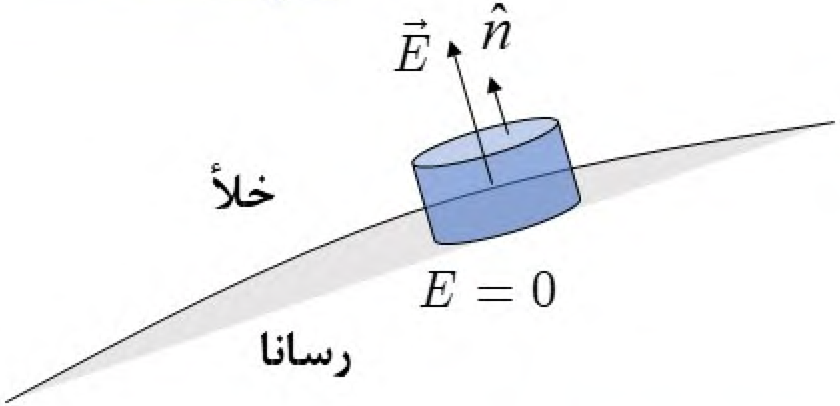


۱ - میدان درون رسانا در حالت الکتروستاتیک صفر است

۲ - هر گونه بار اضافی بر روی سطح خارجی رسانا پخش می‌شود

۳ - خطوط میدان الکتریکی بر سطح رسانا عمودند.

۴ - میدان الکتریکی در روی سطح رسانا برابر است با $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$



$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}} \quad \boxed{0 + EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

شکل انتگرالی قانون گوس

$$\oint_A \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r})\,dv$$

قضیه‌ی واگرایی برای میدان الکتریکی

$$\oint_A \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da = \int_V \nabla\cdot\mathbf{E}\,dv$$

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{E}\,dv = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r})\,dv$$

$$\int_V \left[\nabla\cdot\mathbf{E} - \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}\right]dv = 0$$

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}}$$

در ناحیه‌ای از فضا که فقط یک بار نقطه‌ای وجود داشته باشد، واگرایی میدان الکتریکی برابر است با:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = q\,\frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q)}{\epsilon_0}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$$

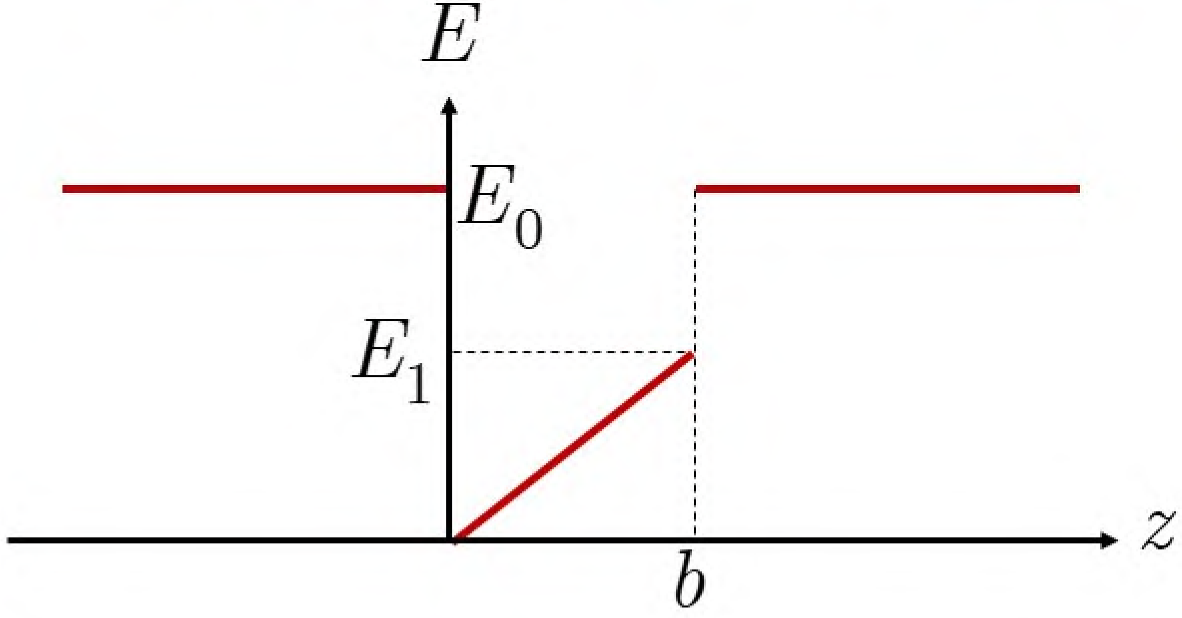
$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

در نقاطی که چگالی بار صفر است داریم:

$$\boxed{\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = 0}$$

می‌خواهیم با داشتن میدان الکتریکی در نقاط فضا، چگالی‌های بار الکتریکی را تعیین کنیم:

$$\mathbf{E}(z) = \begin{cases} E_0\hat{\mathbf{e}}_z & z < 0 \\ \dfrac{E_1 z}{b}\hat{\mathbf{e}}_z & 0 \le z \le b \\ E_0\hat{\mathbf{e}}_z & z > b \end{cases}$$

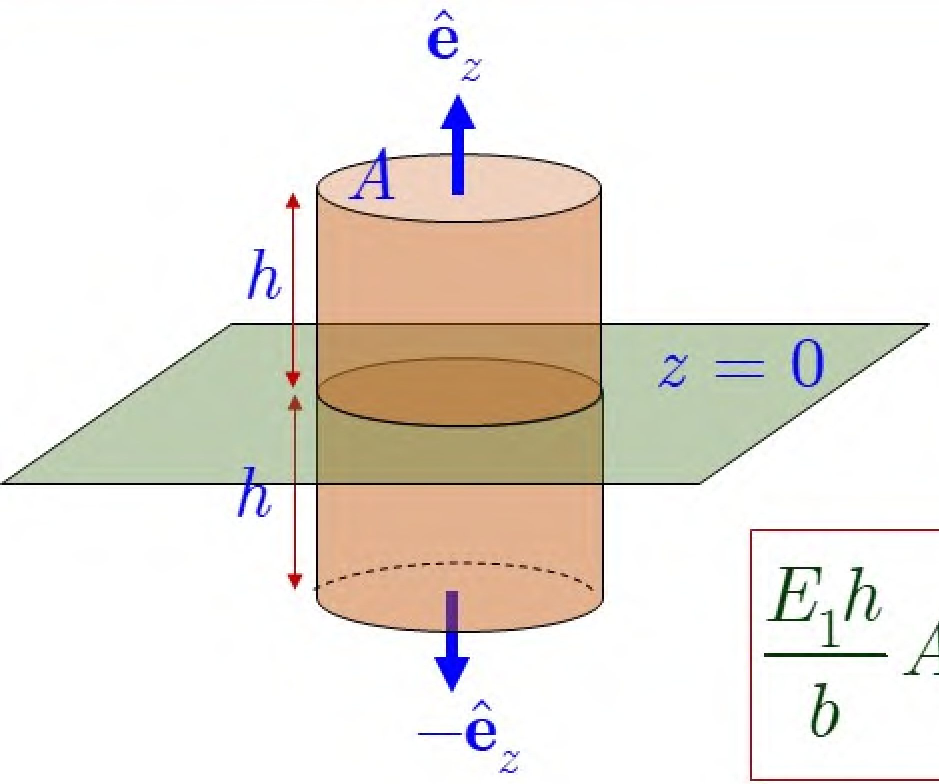


حل:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(z)=\frac{\rho}{\epsilon_0}\Rightarrow\rho=\epsilon_0\frac{dE}{dz}=\begin{cases}0 & z<0\\ \epsilon_0\dfrac{E_1}{b} & 0\le z\le b\\ 0 & z>b\end{cases}$$

در $z=0$ و $z=b$ میدان الکتریکی دارای گسستگی است. و مشتق آن نسبت به z وجود ندارد. این نشان می دهد

که بر روی سطوح $z=0$ و $z=b$ چگالی سطحی بار وجود دارد.



حل:

$$\oint_A \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \qquad h \to 0$$

$$\boxed{\frac{E_1 h}{b}A - E_0 A = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}}$$

$$\boxed{\frac{E_1 h}{b}A - E_0 A = \frac{\sigma(z=0)A}{\epsilon_0}}$$

$$\boxed{\sigma(z=0) = -\epsilon_0 E_0}$$

به عنوان تمرین نشان دهید که در سطح $z = b$ چگالی سطح به صورت زیر است:

$$\boxed{\sigma(z=b) = -\epsilon_0\left(E_0 - E_1\right)}$$

می‌دانیم که پتانسیل الکتریکی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

با اثرِ عملگرِ لاپلاسی بر این رابطه، معادله‌ی پواسون را به دست آورید

حل:

قبل از هر چیز توجه می‌کنیم که:

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

$$\boxed{\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\mathbf{r}')dv'\,\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}$$

$$\boxed{\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = \frac{-4\pi}{4\pi\epsilon_0}\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')dv'}$$

$$\boxed{\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}}$$

میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع بار در فضا به شکل زیر است:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r^3}\mathbf{r}; \quad 0 \leq r < \infty$$

چگالی حجمی بار و نیز بار کل را حساب کنید.

حل:

$$\boxed{\rho(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})}$$

$$\boxed{\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} e^{-\alpha r} \nabla \frac{1}{r}; \quad 0 \leq r < \infty}$$

$$\boxed{\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f \nabla \cdot \mathbf{F}}$$

حل:

$$\rho(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi}\left[\left(\nabla e^{-\alpha r}\right)\cdot \nabla \frac{1}{r} + e^{-\alpha r}\nabla^2 \frac{1}{r}\right]$$

$$= -\frac{q}{4\pi}\left[\left(-\alpha e^{-\alpha r}\right)\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \frac{-\mathbf{r}}{r^3} + e^{-\alpha r}\nabla^2 \frac{1}{r}\right]$$

$$= -\frac{q}{4\pi}\left[\frac{\alpha e^{-\alpha r}}{r^2} - 4\pi e^{-\alpha r}\delta(\mathbf{r})\right]$$

$$= \left[-\frac{q}{4\pi}\frac{\alpha e^{-\alpha r}}{r^2} + q\delta(\mathbf{r})\right]$$

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$$

$$Q_{tot} = \int \rho dv = \int_0^\infty \frac{-q}{4\pi}\frac{\alpha e^{-\alpha r}}{r^2} 4\pi r^2 dr + q\int_0^\infty \delta(\mathbf{r}) 4\pi r^2 dr = qe^{-\alpha r}\Big|_0^\infty + q = -q + q = 0$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی