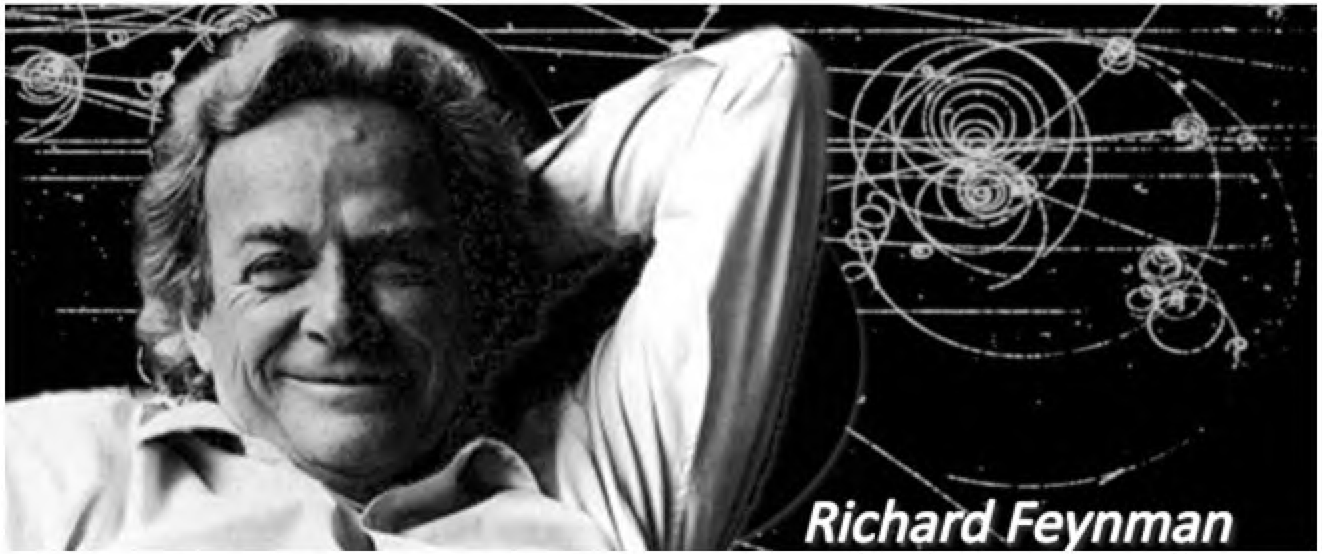
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را
به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس بیست و چهارم

مسائل مقدار مرزی- ۲

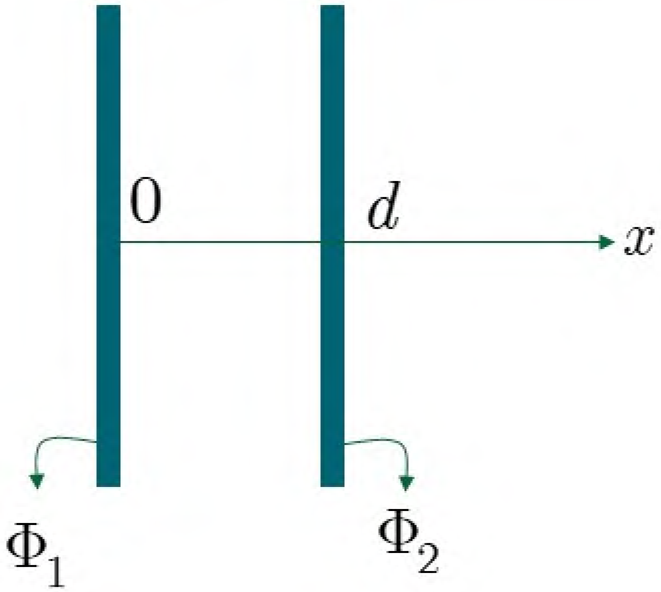
Boundary Value Problems-Part2

دانشگاه خوارزمی

دستگاه کارتزین: $\Phi = \Phi(x)$

$$\nabla^2\Phi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0 \qquad \boxed{\Phi(x) = ax + b}$$

مثال: دو صفحه‌ی رسانای موازی با ابعاد بی نهایت



شرایط مرزی:
$$\boxed{\Phi(x=0) = \Phi_1, \quad \Phi(x=d) = \Phi_2}$$

$$\boxed{b = \Phi_1, \quad a = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{d}}$$

$$\boxed{\Phi(x) = \left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{d}\right) x + \Phi_1}$$

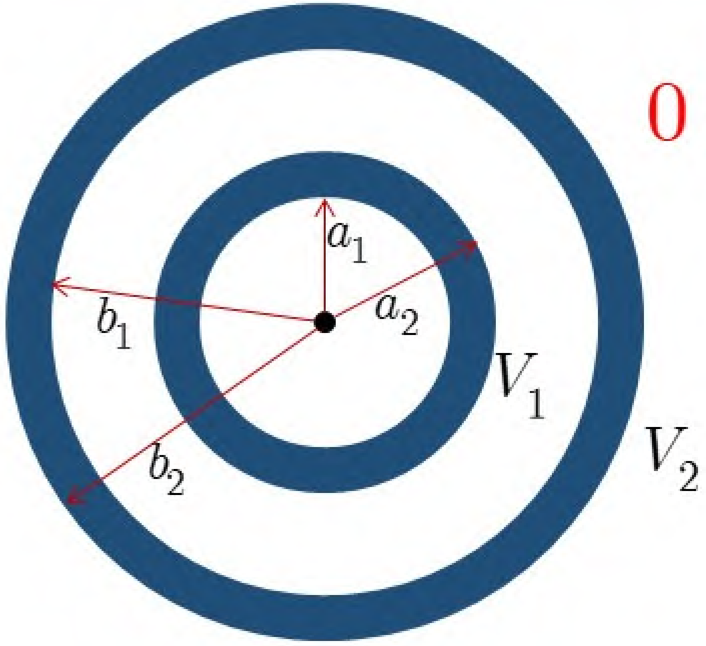
دانشگاه خوارزمی

فرض کنید پتانسیل فقط تابع r باشد $\Phi = \Phi(r)$

$$\boxed{\nabla^2\Phi(r) = \nabla_r^2\Phi(r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 0}$$

$$\boxed{r^2\frac{d\Phi}{dr} = a} \qquad \boxed{\frac{d\Phi}{dr} = \frac{a}{r^2}} \qquad \boxed{\Phi = -\frac{a}{r} + b}$$

$$\boxed{\Phi = \frac{A}{r} + B}$$



$0 \le r \le a_1$

$$\nabla^2\Phi(r) = 0 \Rightarrow \Phi(r) = \frac{A_1}{r} + B_1$$

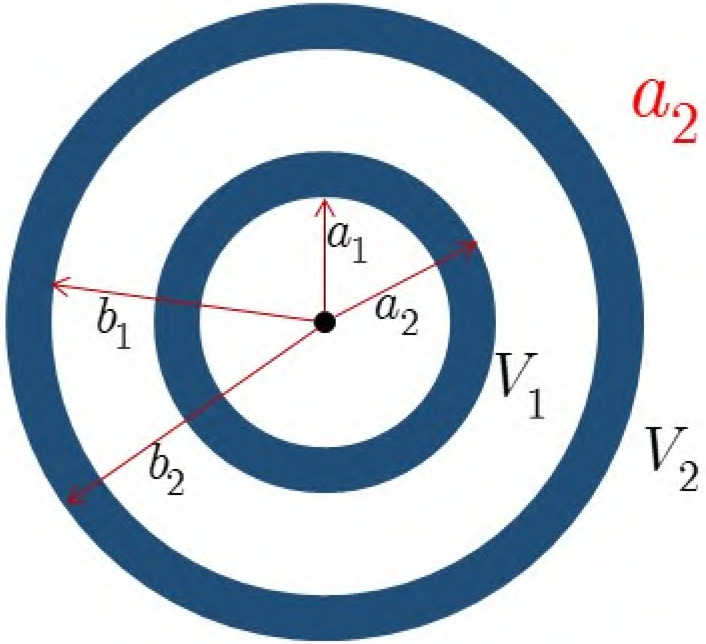
$$\Phi(0) \neq \infty \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\Phi(a_1) = V_1 \Rightarrow B_1 = V_1$$

$$\Phi = V_1 \qquad 0 \le r \le a_1$$

$a_1 \le r \le a_2$

$$\Phi = V_1 \qquad a_1 \le r \le a_2$$



$a_2 \le r \le b_1$

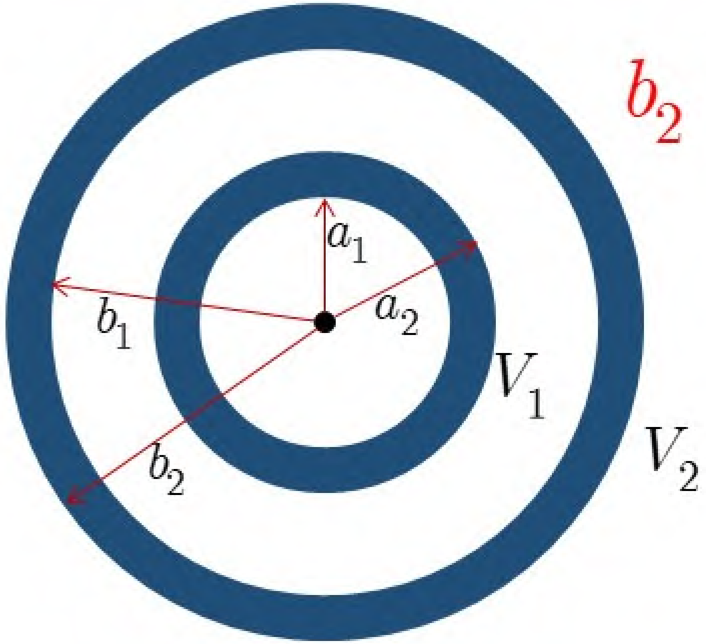
$$\nabla^2\Phi(r) = 0 \Rightarrow \Phi(r) = \frac{A_2}{r} + B_2$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi(a_2) &= V_1 = \frac{A_2}{a_2} + B_2 \\ \Phi(b_1) &= V_2 = \frac{A_2}{b_1} + B_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} A_2 &= -(V_2 - V_1)\frac{a_2 b_1}{b_1 - a_2} \\ B_2 &= \frac{b_1 V_2 - a_2 V_1}{b_1 - a_2} \end{aligned}\right.$$

$$\Phi(r) = -\frac{(V_2 - V_1)a_2 b_1}{b_1 - a_2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{b_1 V_2 - a_2 V_1}{b_1 - a_2}, \qquad a_2 \le r \le b_1$$

$b_1 \le r \le b_2$

$$\Phi = V_2 \qquad b_1 \le r \le b_2$$

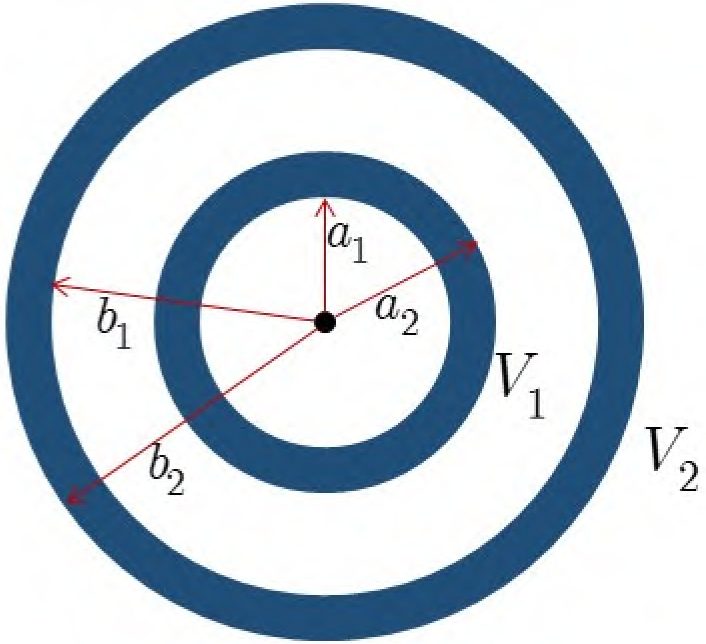


$$b_2 \leq r < \infty$$

$$\nabla^2\Phi(r) = 0 \Rightarrow \Phi(r) = \frac{A_3}{r} + B_3$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(b_2) = V_2 \\ \Phi(\infty) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A_3 = V_2 b_2 \\ B_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Phi(r) = \frac{V_2 b_2}{r}, \qquad b_2 \leq r < \infty$$

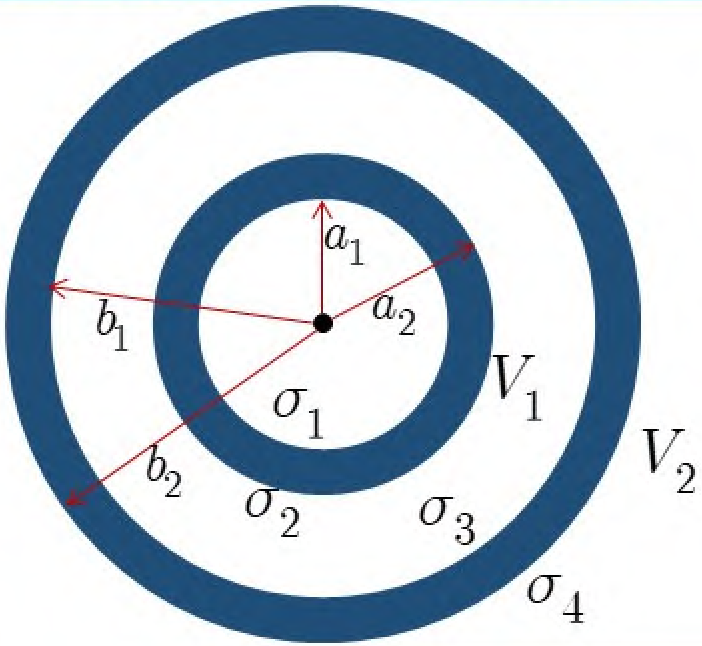


$$\Phi(r) = \begin{cases} V_1 & 0 \le r \le a_1 \\ V_1 & a_1 \le r \le a_2 \\ -\dfrac{(V_2 - V_1)a_2 b_1}{b_1 - a_2}\dfrac{1}{r} + \dfrac{b_1 V_2 - a_2 V_1}{b_1 - a_2} & a_2 \le r \le b_1 \\ V_2 & b_1 \le r \le b_2 \\ \dfrac{V_2 b_2}{r} & b_2 \le r < \infty \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(r) = -\nabla\Phi(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a_1 \\ 0 & a_1 < r < a_2 \\ -\dfrac{(V_2 - V_1)a_2 b_1}{b_1 - a_2}\dfrac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & a_2 < r < b_1 \\ 0 & b_1 < r < b_2 \\ \dfrac{V_2 b_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & b_2 < r < \infty \end{cases}$$

دانشگاه خوارزمی

مثال: دو کره ی هم مرکز



$$\mathbf{E}(r) = -\nabla\Phi(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a_1 \\ 0 & a_1 < r < a_2 \\ -\dfrac{(V_2 - V_1)a_2 b_1}{b_1 - a_2}\dfrac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & a_2 < r < b_1 \\ 0 & b_1 < r < b_2 \\ \dfrac{V_2 b_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & b_2 < r < \infty \end{cases}$$

چگالی بار بر روی سطح داخلی کره ی کوچک‌تر $\sigma_1 = 0$

چگالی بار بر روی سطح خارجی کره ی کوچک‌تر

$$\sigma_2 = \epsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\Big|_{a_2} = \epsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{\mathbf{r}}\Big|_{a_2} = -\epsilon_0 \frac{(V_2 - V_1)}{b_1 - a_2}\frac{b_1}{a_2}$$

چگالی بار بر روی سطح داخلی کره ی بزرگ‌تر

$$\sigma_3 = \epsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\Big|_{b_1} = \epsilon_0 \vec{E}\cdot(-\hat{\mathbf{r}})\Big|_{b_1} = \epsilon_0 \frac{(V_2 - V_1)}{b_1 - a_2}\frac{a_2}{b_1}$$

چگالی بار بر روی سطح خارجی کره ی بزرگ‌تر

$$\sigma_4 = \epsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\Big|_{b_2} = \epsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{\mathbf{r}}\Big|_{b_2} = \epsilon_0 \frac{V_2}{b_2}$$

دانشگاه خوارزمی

فرض کنید در ناحیه‌ای از فضا تقارن مسئله به گونه‌ای باشد که پتانسیل الکتریکی فقط تابعی از ρ (فاصله‌ی شعاعی تا محور z) باشد $\Phi = \Phi(\rho)$

$$\boxed{\nabla^2\Phi(\rho) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\Phi}{d\rho}\right) = 0}$$

$$\boxed{\left(\rho\frac{d\Phi}{d\rho}\right) = a_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi}{d\rho} = \frac{a_0}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \Phi = a_0 \ln\rho + b_0}$$

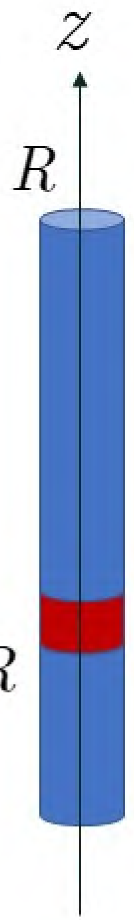
فرض کنید پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ی $\rho = \rho_0$ (یعنی روی استوانه‌ای به شعاعِ ρ_0) برابر با صفر انتخاب کنیم:

$$a_0 \ln\rho_0 + b_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = -a_0 \ln\rho_0$$

$$\boxed{\Phi(\rho) = a_0 \ln\frac{\rho}{\rho_0}}$$

دانشگاه خوارزمی

پتانسیل الکتریکی را در اطراف یک میله‌ی رسانای باردار استوانه‌ای بسیار دراز به شعاع R پیدا کنید.



$$\Phi(\rho_0) = 0$$

$$\boxed{\Phi(\rho) = a_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}}$$

$$\sigma = \epsilon_0 \left(\mathbf{E} \cdot \hat{e}_\rho \right)\Big|_{\rho=R} = \epsilon_0 \left(-\frac{d\Phi}{d\rho} \right)_{\rho=R} = -\epsilon_0 \frac{a_0}{R} \Rightarrow a_0 = -\frac{R\sigma}{\epsilon_0}$$

$$dq = \sigma 2\pi R dz$$

$$\lambda = \frac{dq}{dz} = \sigma 2\pi R$$

$$\boxed{\Phi(\rho) = -\frac{R\sigma}{\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0}}$$

تا این‌جا معادله‌ی لاپلاس را در دستگاه‌های مختصات مختلف در حالت یک بُعدی برای شرایط خاصی حل کردیم. مثلا فرض کردیم در دستگاه مختصات کروی در حالت یک بُعدی پتانسیل فقط تابع r باشد. می‌توانیم مسایل دیگری را مطرح کنیم مثلا در دستگاه کروی پتانسیل فقط تابع θ باشد. یا در دستگاه استوانه‌ای فقط تابع ϕ باشد. مسایلی از این دست را در تمرین‌ها خواهیم دید.

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید