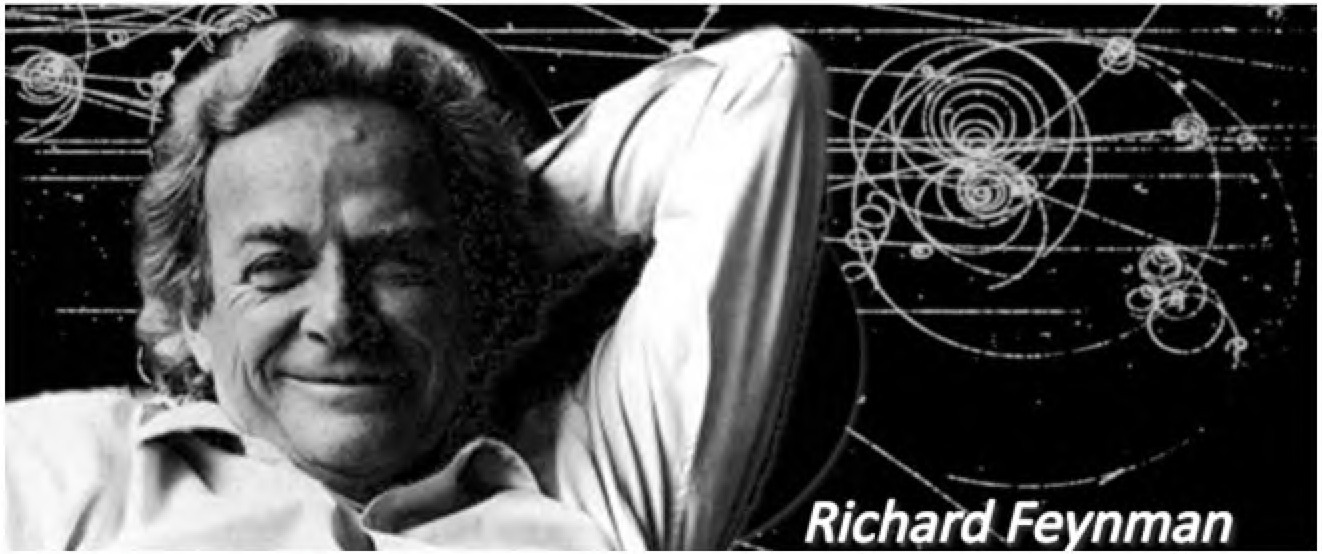
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس بیست و پنجم

مسائل مقدار مرزی-۳

Boundary Value Problems-Part3

دانشگاه خوارزمی

فرض کنید در ناحیه‌ای از فضا تقارن مسئله به گونه‌ای باشد که پتانسیل الکتریکی مستقل از مختصه‌ی z و فقط تابعی از مختصات x و y باشد

$$\Phi = \Phi(x, y)$$

$$\boxed{\nabla^2\Phi(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0}$$

پتانسیل را به شکل حاصل‌ضرب دو تابع به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$\boxed{Y(y)\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = 0} \qquad \boxed{\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = 0}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \alpha}$$

ثابت جداسازی α ممکن است منفی، مثبت یا صفر باشد.

شرایط مرزی تعیین کننده‌ی ثابت جداسازی است

الف) اگر $\alpha = 0$

$$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2X(x)}{dx^2} = 0 \qquad X(x) = ax + b$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = 0 \qquad Y(y) = cy + d$$

$$\boxed{\Phi(x,y) = Axy + Bx + Cy + D}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \alpha$$

ب) اگر $\alpha < 0$

$$\alpha = -k^2$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k^2X(x) = 0$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} - k^2Y(y) = 0$$

$$X(x) = A\sin kx + B\cos kx$$

$$Y(y) = C\sinh ky + D\cosh ky$$

و یا

$$X(x) = ae^{ikx} + be^{-ikx}$$

$$Y(y) = ce^{ky} + de^{-ky}$$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \alpha$$

ج) اگر $\alpha > 0$

$$\alpha = k^2$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} - k^2X(x) = 0$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + k^2Y(y) = 0$$

$$X(x) = A\sinh kx + B\cosh kx$$

$$Y(y) = C\sin ky + D\cos ky$$

و یا

$$X(x) = ae^{kx} + be^{-kx}$$

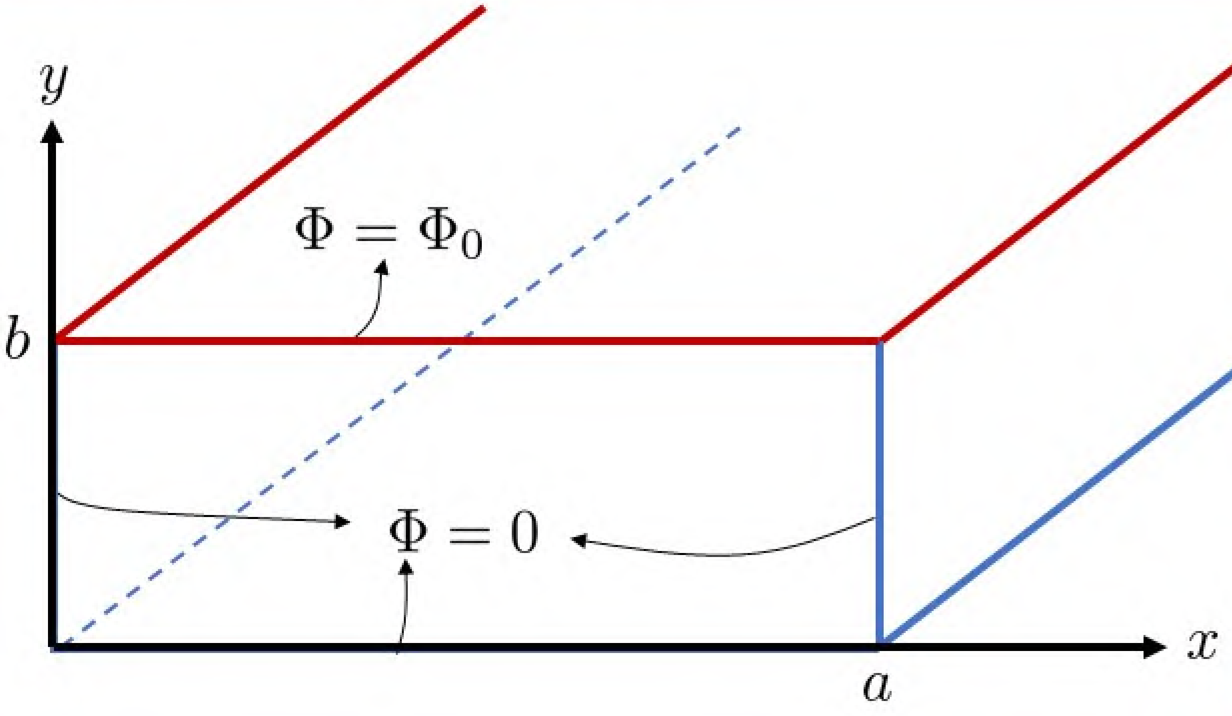
$$Y(y) = ce^{iky} + de^{-iky}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\nabla^2\Phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \alpha$$

تابع $\Phi(x,y)$ برای $\alpha = -k^2$	تابع $\Phi(x,y)$ برای $\alpha = k^2$	تابع $\Phi(x,y)$ برای $\alpha = 0$
$\cos kx \cosh ky$	$\cosh kx \cos ky$	x
$\cos kx \sinh ky$	$\cosh kx \sin ky$	y
$\sin kx \cosh ky$	$\sinh kx \cos ky$	xy
$\sin kx \sinh ky$	$\sinh kx \sin ky$	
$\cos kx e^{ky}$	$e^{kx} \cos ky$	
$\cos kx e^{-ky}$	$e^{-kx} \cos ky$	
$\sin kx e^{ky}$	$e^{kx} \sin ky$	
$\sin kx e^{-ky}$	$e^{-kx} \sin ky$	



کانالی با مقطع مستطیل و طول نامتناهی با دیواره‌های رسانا در نظر بگیرید. پتانسیل دیواره‌ها مطابق شکل روبرو است. پتانسیل الکتریکی را درون کانال پیدا کنید.

حل:

ابتدا فرض می‌کنیم ثابت جدا سازی صفر باشد. نشان خواهیم داد که این فرض منجر به پاسخ درست نمی‌شود

$$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\Phi(x,y) = Axy + Bx + Cy + D}$$

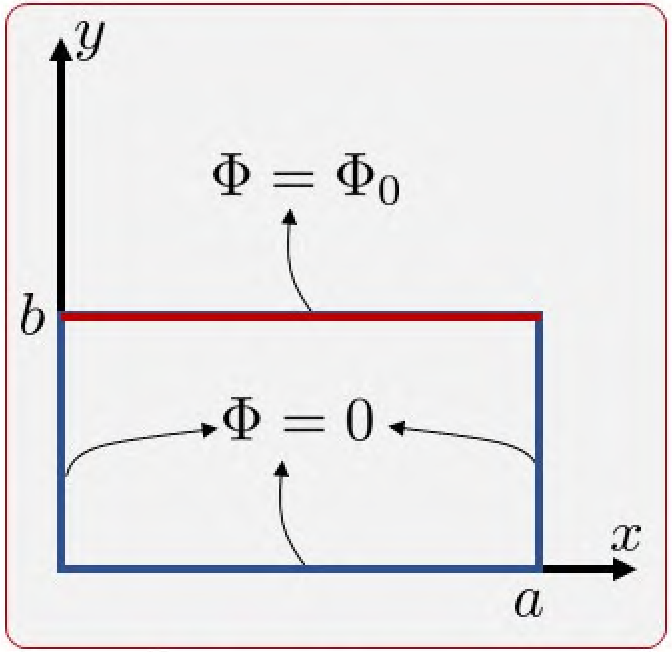
$$\boxed{\Phi(0,y) = 0 \Rightarrow Cy + D = 0 \Rightarrow C = 0, D = 0}$$

$$\boxed{\Phi(x,0) = 0 \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow B = 0}$$

$$\boxed{\Phi(a,y) = 0 \Rightarrow Aay = 0 \Rightarrow A = 0}$$

همه‌ی ضرائب صفر شدند. یعنی پتانسیل همه‌جا صفر به دست آمد!
بنابر این ثابت جدا سازی در این مسئله نمی‌توان برابر با صفر باشد.

دانشگاه خوارزمی



$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \alpha$$

نشان دهید که ثابت جدا سازی در این مسئله نمی تواند مثبت باشد.

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k^2X(x) = 0$$
$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} - k^2Y(y) = 0$$

بنابر این در این مسئله ثابت جدا سازی منفی است $\alpha = -k^2$

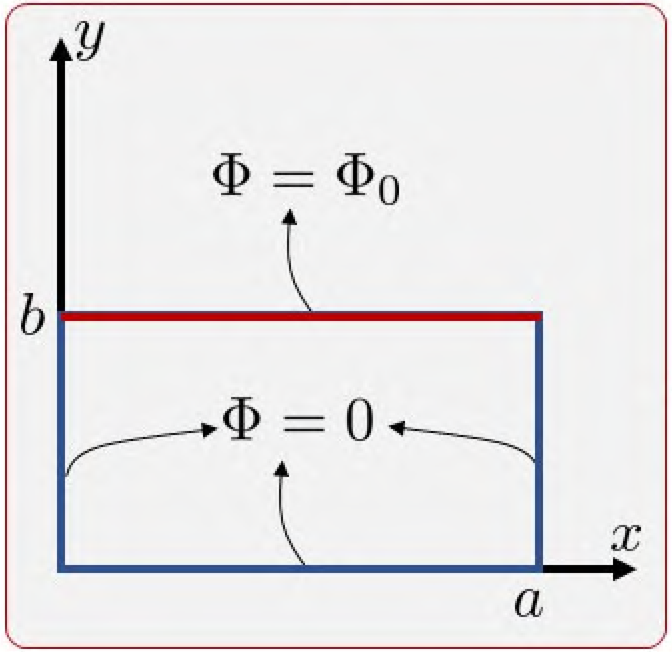
$$X(x) = A\sin kx + B\cos kx$$
$$Y(y) = C\sinh ky + D\cosh ky$$

$$\Phi(0,y) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$
$$\Phi(x,0) = X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$X(x) = A\sin kx$$
$$Y(y) = C\sinh ky$$

$$\Phi(a,y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0 \Rightarrow A\sin ka = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{a}; n = 1,2,\cdots$$

$$X_n(x) = \sin k_n x; \quad Y_n(y) = \sinh k_n y$$



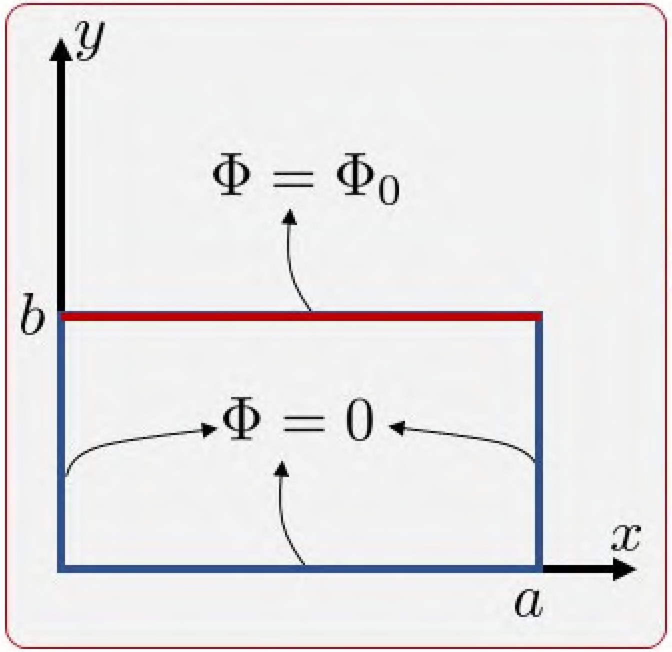
$$\Phi_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y)$$

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \Phi_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x)Y_n(y)$$

$$\boxed{\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y; \quad 0 \le x \le a,\, 0 \le y \le b}$$

$$\boxed{\Phi(x,b) = \Phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}b}$$

$$\boxed{\int_0^a \Phi_0 \sin\frac{m\pi}{a}x dx = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sinh\frac{n\pi}{a}b \int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{a}x dx}$$



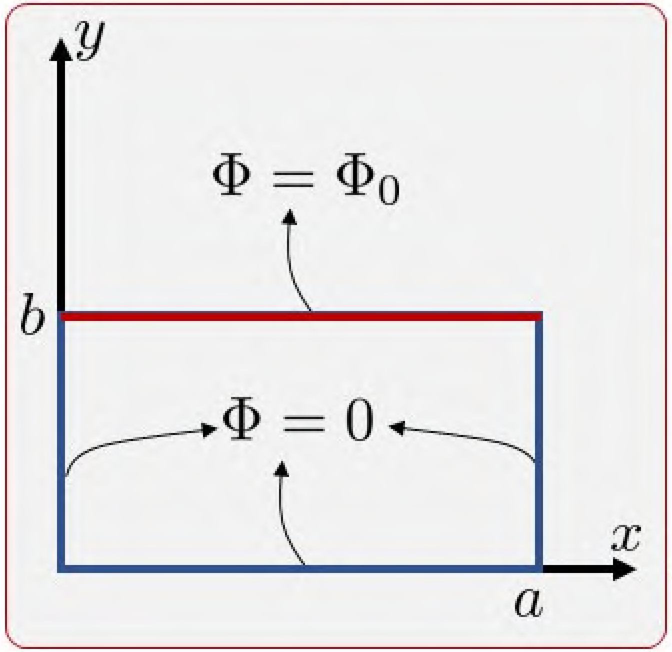
$$\int_0^a \Phi_0 \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sinh\frac{n\pi}{a}b \int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx$$

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = \frac{a}{2}\delta_{mn}$$

$$\int_0^a \Phi_0 \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{a}{2}\delta_{mn} \sinh\frac{n\pi}{a}b$$

$$\int_0^a \Phi_0 \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = F_m \frac{a}{2}\sinh\frac{m\pi}{a}b$$

$$F_m = \frac{2\Phi_0}{a\sinh\frac{m\pi}{a}b}\int_0^a \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx$$



$$F_m = \frac{2\Phi_0}{a \sinh \frac{m\pi}{a} b} \int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x dx$$

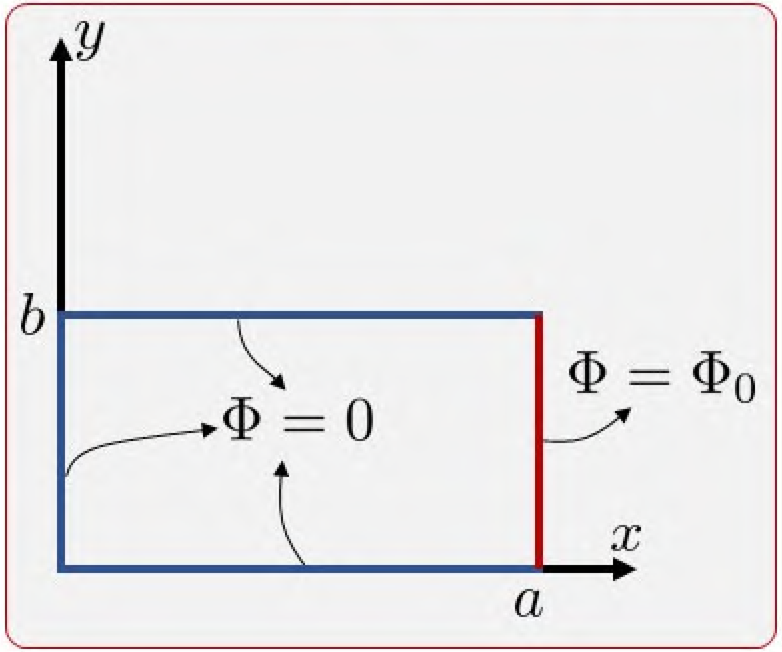
$$\int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x dx = \begin{cases} 0 & m = 2k \\ \dfrac{2a}{m\pi} & m = 2k+1 \end{cases}$$

$$F_n = \frac{4\Phi_0}{n\pi \sinh \frac{n\pi b}{a}}$$

برای n های فرد

$$\Phi(x,y) = \frac{4\Phi_0}{\pi} \sum_{n=\text{odd}}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{a} x \frac{\sinh \frac{n\pi}{a} y}{n \sinh \frac{n\pi b}{a}} \; ; \qquad 0 \le x \le a, 0 \le y \le b$$

$$\Phi(x,y) = \frac{4\Phi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sin \frac{(2k+1)\pi}{a} x \frac{\sinh \frac{(2k+1)\pi}{a} y}{(2k+1) \sinh \frac{(2k+1)\pi b}{a}} \; ; \qquad 0 \le x \le a, 0 \le y \le b$$



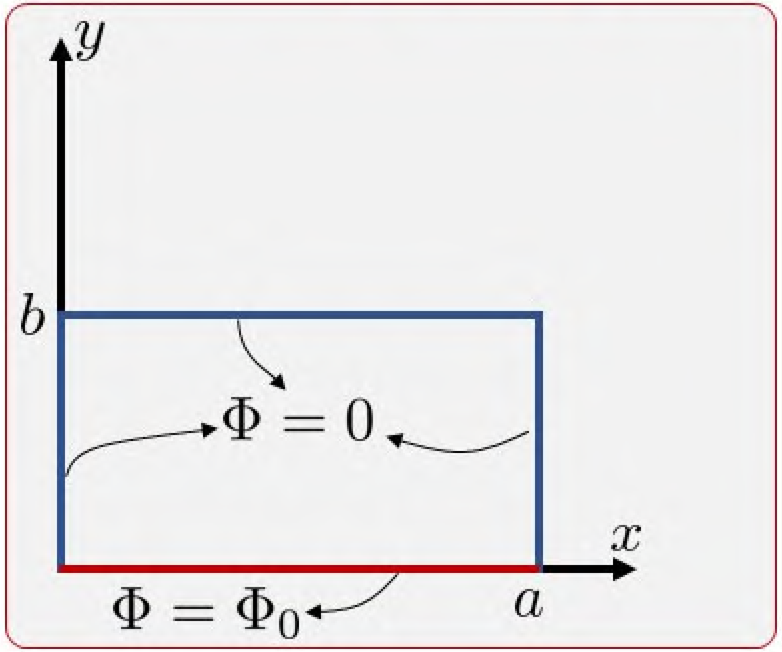
کانالی با مقطع مستطیل و طول نامتناهی با دیواره‌های رسانا در نظر بگیرید. پتانسیل دیواره‌ها مطابق شکل روبرو است. پتانسیل الکتریکی را درون کانال پیدا کنید.

حل:

روش حل کاملاً شبیه مثال قبل است.

در این حالت نشان دهیدکه ثابت جداسازی مثبت است و پاسخ مسئله به شکل زیر است

$$\boxed{\Phi(x,y)=\frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sin\frac{(2k+1)\pi}{b}y\,\frac{\sinh\frac{(2k+1)\pi}{b}x}{(2k+1)\sinh\frac{(2k+1)\pi a}{b}}\,;\qquad 0\le x\le a,\,0\le y\le b}$$



کانالی با مقطع مستطیل و طول نامتناهی با دیواره‌های رسانا در نظر بگیرید. پتانسیل دیواره‌ها مطابق شکل روبرو است. پتانسیل الکتریکی را درون کانال پیدا کنید.

حل:

روش حل کاملاً شبیه مثال قبل است.

با نوشتن تابع Y به شکل زیر می توان به راحتی شرط مرزی را بر روی صفحه‌ی y=0 تضمین کرد

$$\boxed{Y(y) = \sinh k(b-y)}$$

$$\boxed{\Phi(x,y) = \frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sin\frac{(2k+1)\pi}{a}x\,\frac{\sinh\frac{(2k+1)\pi}{a}(b-y)}{(2k+1)\sinh\frac{(2k+1)\pi b}{a}}\;; \qquad 0 \le x \le a,\, 0 \le y \le b}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\nabla^2\Phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} &= -k_x^2 \\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} &= -k_y^2 \\ \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} &= +k_z^2 \end{aligned}}$$

$$\boxed{k_z^2 = k_x^2 + k_y^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X &= e^{\pm i k_x x} \\ Y &= e^{\pm i k_y y} \\ Z &= e^{\pm k_z z} \end{aligned}}$$

این جواب‌ها برای وقتی است که ثابت‌های جدا سازی مخالف صفر باشند

دانشگاه خوارزمی

در صورتی که ثابت های جدا سازی برابر با صفر باشند، آن گاه:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=0$$
$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=0$$
$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

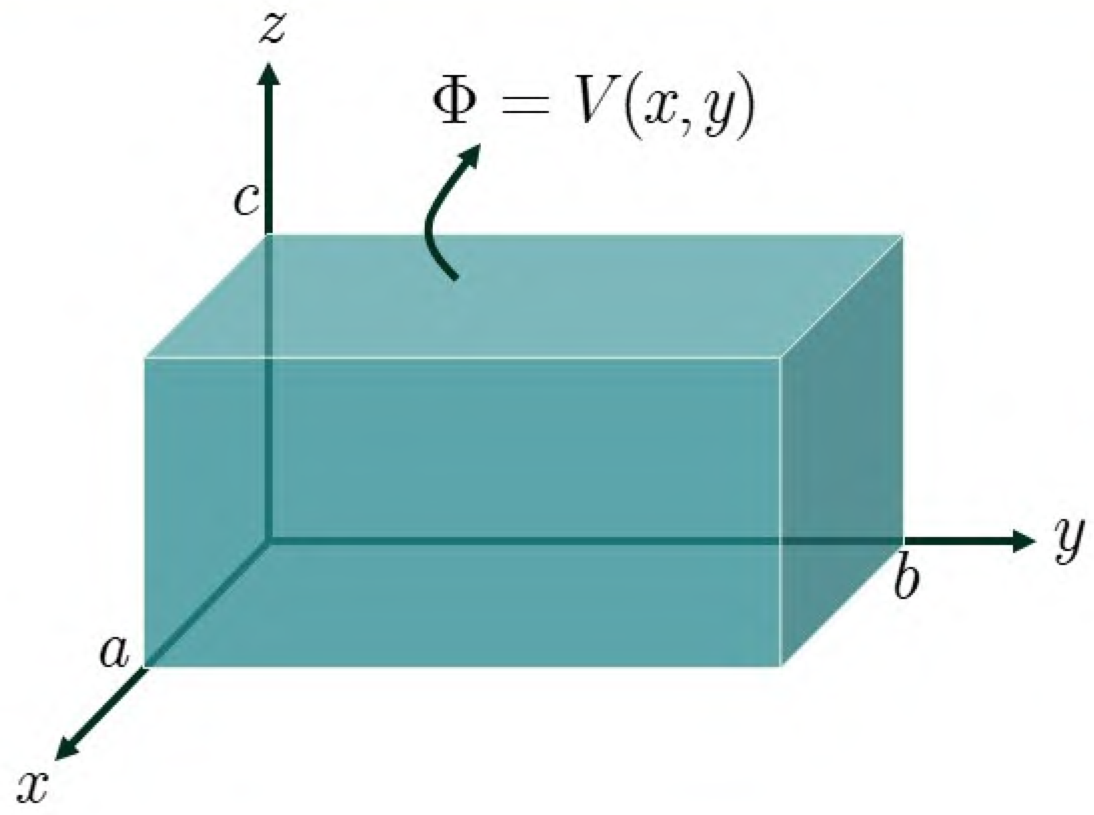
$$X=a_1x+b_1$$
$$Y=a_2y+b_2$$
$$Z=a_3z+b_3$$

$$\Phi\left(x,y,z\right)=A_1xyz+A_2xy+A_3xz+A_4yz+A_5x+A_6y+A_7z+A_8$$

دانشگاه خوارزمی

پتانسیل روی همه‌ی سطوح صفر است به جز وجه نشان داده شده.

پتانسیل الکتریکی را درون مکعب پیدا کنید



$$X = \sin k_x x$$

$$Y = \sin k_y y$$

$$Z = \sinh k_z z$$

$$\Phi(0,y,z) = \Phi(x,0,z) = \Phi(x,y,0) = 0 \Rightarrow$$

$$k_x = \frac{n\pi}{a}$$

$$k_y = \frac{m\pi}{b}$$

$$k_z = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

$$\Phi(a,y,z) = \Phi(x,b,z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Phi_{nm}(x,y,z) = \sin\frac{n\pi\, x}{a}\sin\frac{m\pi\, y}{b}\sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\right)\pi\, z$$

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\sin\frac{n\pi\, x}{a}\sin\frac{m\pi\, y}{b}\sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\right)\pi\, z$$

$$\Phi(x,y,c) = V(x,y)$$

$$\mathrm{V}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\sin\frac{n\pi\, x}{a}\sin\frac{m\pi\, y}{b}\sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\right)\pi\, c$$

$$A_{nm} = \frac{4}{ab\sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\right)\pi\, c}\int_0^a dx\int_0^b dy\mathrm{V}(x,y)\sin\frac{n\pi\, x}{a}\sin\frac{m\pi\, y}{b}$$

مسئله را برای حالت $V(x,y)=V_0$ حل کنید

شاد و مهربان باشید