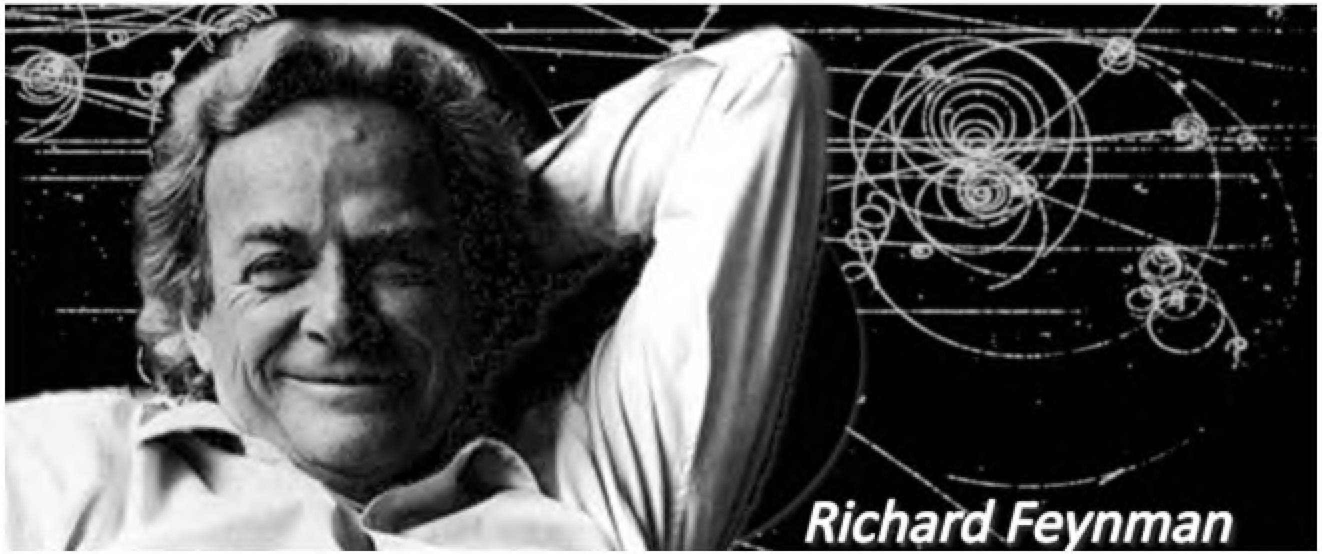
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس بیست و ششم

مسائل مقدار مرزی- ۴

Boundary Value Problems-Part4

دانشگاه خوارزمی

فرض کنید مسئله نسبت به زاویه‌ی سمتی تقارن داشته باشد: $\Phi = \Phi\left(r,\theta\right)$

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) = 0$$

معادله را به روش جدا سازی متغیرها حل می‌کنیم: $\Phi\left(r,\theta\right) = F(r)P(\theta)$

$$\frac{1}{r^2}P\left(\theta\right)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF(r)}{dr}\right) + \frac{F(r)}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) = 0$$

$$\frac{1}{F}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right) = -\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) = k$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + kP = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right) = kF$$

$$k = n(n+1)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+n(n+1)P=0$$

تغییر متغیر $\eta=\cos\theta$ را در نظر می‌گیریم. $0\le\theta\le\pi\,,\quad -1\le\eta\le 1$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\eta^2}$$

$$\frac{d}{d\theta}=-\sin\theta\frac{d}{d(\cos\theta)}=-\sqrt{1-\eta^2}\frac{d}{d\eta}$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{dP}{d\eta}\right]+n(n+1)P=0$$

$$(1-\eta^2)\frac{d^2P}{d\eta^2}-2\eta\frac{dP}{d\eta}+n(n+1)P=0$$

این معادله‌ی دیفرانسیل به معادله‌ی لژاندر معروف است و پاسخ آن چند جمله‌ای‌های لژاندر است

دانشگاه خوارزمی

لازم است در مورد چند جمله‌ای‌های لژاندر اطلاعات کافی داشته باشیم

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^k k!(n-k)!(n-2k)!)} x^{n-2k}$$

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$$

$$P_4(\cos\theta) = \frac{1}{8}\left(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3\right)$$

$$\vdots$$

دانشگاه خوارزمی

چند جمله‌ای‌های لژاندر را می‌توان با مشتق گیری متوالی تولید کرد: فرمول رودریگز

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \quad \text{Rodrigues}'\text{formula}$$

تابع مولد چند جمله‌ای‌های لژاندر

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

بین چند جمله‌ای‌های لژاندر رابطه‌ی تعامد زیر برقرار است:

$$\int_{-1}^{1} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)d(\cos\theta) = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1}$$

با استفاده از فرمول رودریگز چند جمله از چندجمله‌ای‌های لژاندر را حساب می کنیم

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \quad \text{Rodrigues' formula}$$

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!}\frac{d^0}{dx^0}(x^2-1)^n = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!}\frac{d}{dx}(x^2-1) = \frac{1}{2}(2x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{16}\frac{d}{dx}(2)(x^2-1)(2x) = \frac{1}{8}(2)(6x^2-2) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

دانشگاه خوارزمی

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

به راحتی دیده می‌شود که

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$$P_n(1) = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

دانشگاه خوارزمی

به راحتی دیده می‌شود که

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right) = n(n+1)F$$

برای حل این معادله فرض می‌کنیم: $F = r^{\alpha}$

با جاگذاری در معادله دیده می‌شود که: $\alpha = -(n+1)$ $\qquad \alpha = n,$

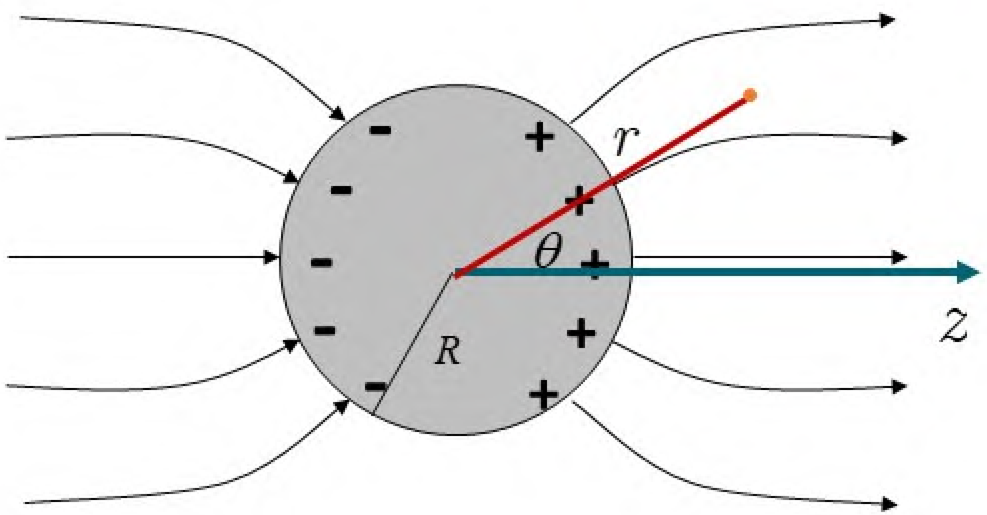
بدین ترتیب پاسخ بخش شعاعی به صور زیر است $F(r) = r^n, r^{-(n+1)}$

$$\Phi\left(r,\theta\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right]\ P_n\left(\cos\theta\right)$$

دانشگاه خوارزمی

پتانسیل الکتریکی را در فضای اطراف یک کره‌ی رسانای **بدون بار** که در یک میدان الکتریکی (که در ابتدا یکنواخت بوده) قرار دارد، به دست آورید

راستای اولیه‌ی میدان را محور z انتخاب می کنیم. $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{e}}_z$



پتانسیل الکتریکی را در فضای اطراف یک کره‌ی رسانای **بدون بار** که در یک میدان الکتریکی (که در ابتدا یکنواخت بوده) قرار دارد، به دست آورید

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right]\ P_n(\cos\theta), r>R$$

سطحِ رسانا یک سطحِ هم‌پتانسیل است. فرض کنید پتانسیل سطح کره را Φ_0 بنامیم.

$$\Phi(R,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n R^n+B_n R^{-(n+1)}\right]\ P_n(\cos\theta)=\Phi_0$$

$$A_0+\frac{B_0}{R}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n R^n+B_n R^{-(n+1)}\right]\ P_n(\cos\theta)=\Phi_0$$

$$A_0+\frac{B_0}{R}=\Phi_0$$

$$A_n R^n=-B_n R^{-(n+1)} \qquad \text{for} \quad n\geq 1$$

$$A_0 = \Phi_0 - \frac{B_0}{R} \qquad\qquad A_n R^n = -B_n R^{-(n+1)}$$

$$\boxed{\lim_{r\to\infty} \Phi(r,\theta) = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = -E_0 z + C = -E_0 r\cos\theta + C}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right] P_n(\cos\theta) = -E_0 r\cos\theta + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A_0 = C; \quad A_1 = -E_0 \\ A_n = 0 \quad \text{for } n \geq 2 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} B_1 = -A_1 R^3 = E_0 R^3 \\ B_n = 0 \quad \text{for } n \geq 2 \end{array}}$$

پس تا این‌جا تنها ضرایب غیر صفر عبارت‌اند از: $A_0; \quad B_0; \quad A_1; \quad B_1$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(r,\theta) = \Phi_0 - \frac{B_0}{R} + \frac{B_0}{r} - E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta$$

هنوز ضریب B_0 را محاسبه نکرده‌ایم.

برای محاسبه‌ی این ضریب از شرطِ «بدونِ بار بودنِ» کره استفاده می‌کنیم. برای این کار ابتدا چگالی سطحی بارِ روی کره را محاسبه می‌کنیم که لازمه‌ی آن محاسبه‌ی مؤلفه‌ی عمودی میدانِ الکتریکی بر روی سطح کره است.

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{B_0}{r^2} + E_0\left(1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E_r(r = R) = -\varepsilon_0 \frac{B_0}{R^2} + 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E_r(r = R) = -\varepsilon_0 \frac{B_0}{R^2} + 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$$

$$Q = \int \sigma da = -\varepsilon_0 \frac{B_0}{R^2} \int da + 3\varepsilon_0 E_0 \int \cos\theta da$$

$$Q = -\varepsilon_0 \frac{B_0}{R^2} 4\pi R^2 + 3\varepsilon_0 E_0 \int_0^{2\pi} R^2 d\phi \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta}_{0}$$

$$Q = -4\pi\varepsilon_0 B_0 \Rightarrow B_0 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$$

اما کره بدونِ بار است. بنابر این

$$B_0 = 0$$

دانشگاه خوارزمی

بدین ترتیب پتانسیل الکتریکی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\Phi(r,\theta) = \Phi_0 - E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta \qquad r \geq R$$

این پتانسیل را می‌توان مجموع دو جمله دانست: یکی عبارت $-E_0 r\cos\theta$ ، که ناشی از میدان یکنواخت است و دیگری جمله‌ی $E_0 R^3\cos\theta/r^2$ که می‌توان به یک دو قطبی واقع در مبدأ مختصات (مرکز کره) نسبت داد (با گشتاور دو قطبی $\vec{p} = 4\pi R^3\epsilon_0\hat{e}_z$)

$$E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = E_0\left(1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -E_0\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\sin\theta$$

$$\sigma = \epsilon_0 E_r\,(r=R) = 3\epsilon_0 E_0\cos\theta$$

دانشگاه خوارزمی

مسئله‌ی فوق را برای حالتی که کره دارای بار Q است حل کنید.

حل این مسئله کاملا شبیه مثال قبل است. تنها باید توجه کرد که به خاطر بار روی کره، ضریب B_0 دیگر صفر نیست. بار کل کره برابر است با Q .

$$\sigma = \epsilon_0 E_r(r=R) = -\epsilon_0 \left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta + \epsilon_0 \frac{B_0}{R^2}$$

$$Q = \int \sigma da = 3\epsilon_0 E_0 \underbrace{\int \cos\theta da}_{0} + \epsilon_0 \frac{B_0}{R^2} \int da$$

$$B_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\Phi(r,\theta) = A_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{E_0}{R^3} r^2 \cos\theta$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی