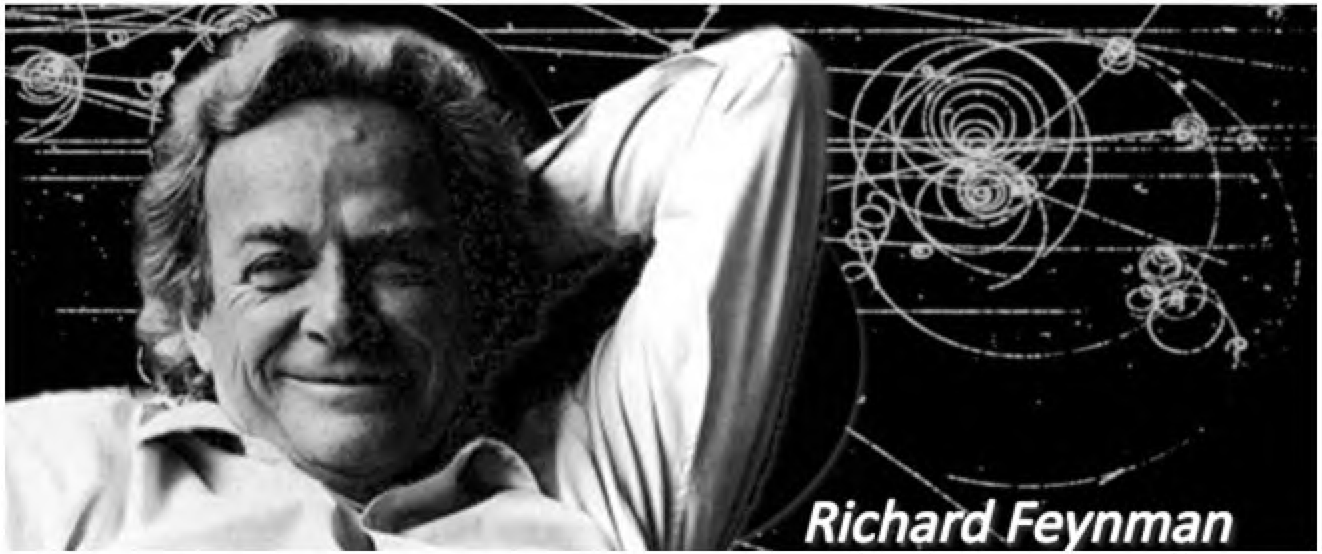
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس چهارم

میدان‌های اسکالر و برداری

Scalar and Vector Fields

دانشگاه خوارزمی

کمیّتی که تابع مکان و احیاناً زمان باشد باشد **میدان** (Field) نامیده می‌شود. اگر آن کمیّت، بردار باشد میدان را برداری و اگر کمیّت اسکالر باشد، میدان را اسکالر (میدان نرده‌ای) گوییم.

میدان اسکالر: **دمای اتاق** میدان برداری: **جاذبه‌ی زمین**

در واقع یك **میدانِ اسکالر** به هر نقطه از فضا (در هر لحظه) یك **عدد** نسبت می‌دهد و یك **میدانِ برداری** به هر نقطه از فضا یك **بردار** نسبت می‌دهد. اگر میدان تابع زمان نباشد، آن را میدان **ایستا (استاتیك)** و اگر تابع مکان نباشد، یعنی در همه‌ی نقاط فضا یك مقدار داشته باشد، (و اگر میدان برداری است، جهت آن نیز در همه نقاط یکی باشد) آن را **میدان یکنواخت** گوییم.

دانشگاه خوارزمی

در حالت کلی، میدان‌های فیزیکی سه بُعدی هستند. یعنی تابعِ سه متغیرِ مختصات‌اند.
فشارِ اتمسفرِ زمین یک میدانِ سه بُعدی است.

اما در حالت‌های ایده‌آل میدان‌های دوبُعدی و یک بُعدی نیز داریم.
مثلاً چگالیِ رنگ روی سطحِ یک دیوار مثالی از یک میدان دوبُعدی است. و یا کششِ یک سیم بسیار نازک در هر نقطه از طولِ آن یک میدانِ یک بُعدی است.

عاملی که میدان را ایجاد می‌کند، چشمه‌ی میدان نامیده می‌شود. هرگاه قواعدِ فیزیکی بینِ میدان و چشمه‌ی میدان مشخص باشند، گوییم یک نظریه‌ی میدان Field Theory داریم.

دانشگاه خوارزمی

در حالت کلی یک میدانِ برداری را می‌توان برحسبِ مؤلفه‌هایش در دستگاه‌های مختصاتِ مختلف، به شکلِ زیر نوشت:

$$\boxed{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r};t) = \boldsymbol{F}(x,y,z;t) = F_x(x,y,z;t)\hat{\boldsymbol{e}}_x + F_y(x,y,z;t)\hat{\boldsymbol{e}}_y + F_z(x,y,z;t)\hat{\boldsymbol{e}}_z}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r};t) = \boldsymbol{F}(\rho,\phi,z;t) = F_\rho(\rho,\phi,z;t)\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + F_\phi(\rho,\phi,z;t)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + F_z(\rho,\phi,z;t)\hat{\boldsymbol{e}}_z}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r};t) = \boldsymbol{F}(r,\theta,\phi;t) = F_r(r,\theta,\phi;t)\hat{\boldsymbol{e}}_r + F_\theta(r,\theta,\phi;t)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + F_\phi(r,\theta,\phi;t)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}$$

دانشگاه خوارزمی

مشتق یک تابع یک متغیره

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

دانشگاه خوارزمی

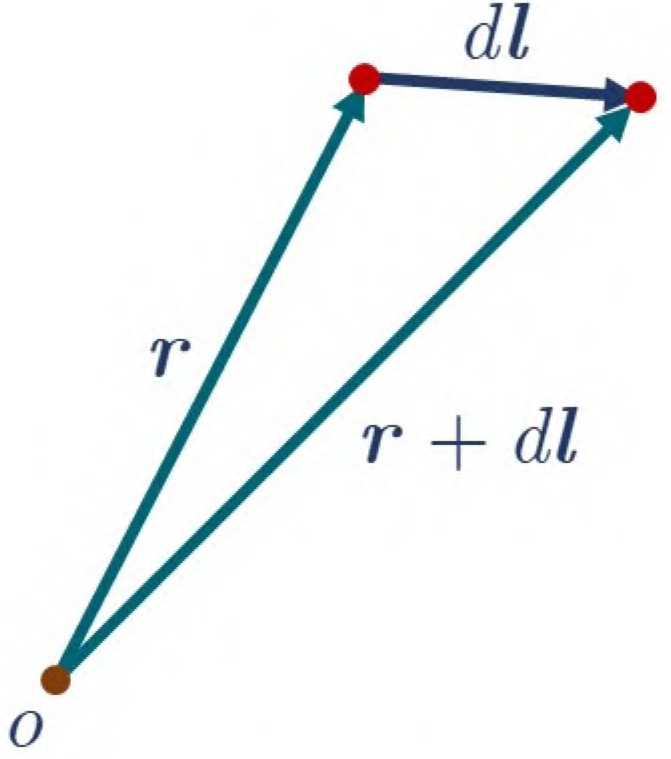
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$ مشتق جزئی نسبت به x

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y}$$ مشتق جزئی نسبت به y

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}$$ مشتق جزئی نسبت به z

دانشگاه خوارزمی

تغییر تابعِ f در جابجایی از نقطه‌ی $r = (x, y, z)$ به نقطه ی مجاورِ آن، (با یک جابجایی خیلی کوچک) یعنی $r + dl = (x + dx,\ y + dy, z + dz)$ به شکلِ زیر بیان می‌شود:



$$\begin{aligned} df &= f(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{l}) - f(\boldsymbol{r}) \\ &= f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \end{aligned}$$

مشتقِ یک تابعِ برداری نیز مانند توابع اسکالر تعریف می‌شود. تابعِ برداریِ $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ را در نظر بگیرید. تغییر این تابع برداری در جابجایی بین دو نقطه‌ی مجاور برابر است با

$$\boxed{d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{l}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}dz}$$

و مشتقات جزئی عبارتند از:

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(x+\Delta x, y, z) - \boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta x} \\
\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(x, y+\Delta y, z) - \boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta y} \\
\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(x, y, z+\Delta z) - \boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta z}
\end{aligned}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\boldsymbol{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\hat{\boldsymbol{e}}_x + A_y(x,y,z)\hat{\boldsymbol{e}}_y + A_z(x,y,z)\hat{\boldsymbol{e}}_z}$$

$$\boxed{d\boldsymbol{A}(x,y,z) = dA_x(x,y,z)\hat{\boldsymbol{e}}_x + dA_y(x,y,z)\hat{\boldsymbol{e}}_y + dA_z(x,y,z)\hat{\boldsymbol{e}}_z}$$

رابطه‌ی فوق فقط در دستگاه مختصات کارتزین صادق است

$$\boxed{\begin{aligned} d\boldsymbol{A} &\neq dA_\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + dA_\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + dA_z\hat{\boldsymbol{e}}_z \\ d\boldsymbol{A} &\neq dA_r\hat{\boldsymbol{e}}_r + dA_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + dA_\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \end{aligned}}$$

برای این‌که روابطِ دُرُست را در دستگاه‌های مختلف پیدا کنیم، باید از قاعده‌ی زیر استفاده کنیم:

$$\boxed{d\big(f\boldsymbol{A}\big) = f\big(d\boldsymbol{A}\big) + \big(df\big)\boldsymbol{A}}$$

در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\boxed{\begin{aligned} d\boldsymbol{A} &= d\left(A_\rho \hat{\boldsymbol{e}}_\rho\right) + d\left(A_\phi \hat{\boldsymbol{e}}_\phi\right) + d\left(A_z \hat{\boldsymbol{e}}_z\right) \\ &= \left(dA_\rho \hat{\boldsymbol{e}}_\rho + A_\rho d\hat{\boldsymbol{e}}_\rho\right) + \left(dA_\phi \hat{\boldsymbol{e}}_\phi + A_\phi d\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\right) + \left(dA_z \hat{\boldsymbol{e}}_z + A_z d\hat{\boldsymbol{e}}_z\right) \end{aligned}}$$

در دستگاه مختصات کروی:

$$\boxed{\begin{aligned} d\boldsymbol{A} &= d\left(A_r \hat{\boldsymbol{e}}_r\right) + d\left(A_\theta \hat{\boldsymbol{e}}_\theta\right) + d\left(A_\phi \hat{\boldsymbol{e}}_\phi\right) \\ &= \left(dA_r \hat{\boldsymbol{e}}_r + A_r d\hat{\boldsymbol{e}}_r\right) + \left(dA_\theta \hat{\boldsymbol{e}}_\theta + A_\theta d\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\right) + \left(dA_\phi \hat{\boldsymbol{e}}_\phi + A_\phi d\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\right) \end{aligned}}$$

مشتق اول و دوم تابع برداریِ زیر را حساب کنید

$$\boldsymbol{F}(t) = (2t+5)\hat{\boldsymbol{e}}_x + \exp(-t)\cos(2t)\hat{\boldsymbol{e}}_y + \sin(t)\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

حل:

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{F}(t)}{dt} = 2\hat{\boldsymbol{e}}_x - \exp(-t)\big[\cos(2t) + 2\sin(2t)\big]\hat{\boldsymbol{e}}_y + \cos(t)\hat{\boldsymbol{e}}_z}$$

$$\boxed{\frac{d^2\boldsymbol{F}(t)}{dt^2} = \exp(-t)\big[-3\cos(2t) + 4\sin(2t)\big]\hat{\boldsymbol{e}}_y - \sin(t)\hat{\boldsymbol{e}}_z}$$

در دستگاه مختصاتِ استوانه‌ای بردار یکه‌ی e_ρ مستقل از ρ و z است اما به زاویه‌ی سمتی ϕ بستگی دارد، یعنی

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_\rho}{\partial \rho} = 0; \qquad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_\rho}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_\rho}{\partial \phi} \neq 0;$$

مشتق این بردار یکه را نسبت به ϕ پیدا کنید

حل:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi \hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\phi \hat{\boldsymbol{e}}_y}$$

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_\rho}{\partial \phi} = -\sin\phi \hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\phi \hat{\boldsymbol{e}}_y = \hat{\boldsymbol{e}}_\phi}$$

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_\rho}{\partial \phi} = \hat{\boldsymbol{e}}_\phi}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\phi\hat{\boldsymbol{e}}_y$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_y$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_\rho}{\partial\phi} = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_y = \hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$
$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{\partial\phi} = -\cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_x - \sin\phi\hat{\boldsymbol{e}}_y = -\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$$
$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_z}{\partial\phi} = 0$$

	$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$	$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$	$\hat{\boldsymbol{e}}_z$
$\frac{\partial}{\partial\rho}$	0	0	0
$\frac{\partial}{\partial\phi}$	$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$	$-\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$	0
$\frac{\partial}{\partial z}$	0	0	0

دانشگاه خوارزمی

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{e}}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \\
\hat{\boldsymbol{e}}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \\
\hat{\boldsymbol{e}}_\phi &= -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y
\end{aligned}
$$

	$\hat{\boldsymbol{e}}_r$	$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$	$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$
$\frac{\partial}{\partial r}$	0	0	0
$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\boldsymbol{e}_\theta$	$-\boldsymbol{e}_r$	0
$\frac{\partial}{\partial \phi}$	$\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$	$\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$	$-\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_r - \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی