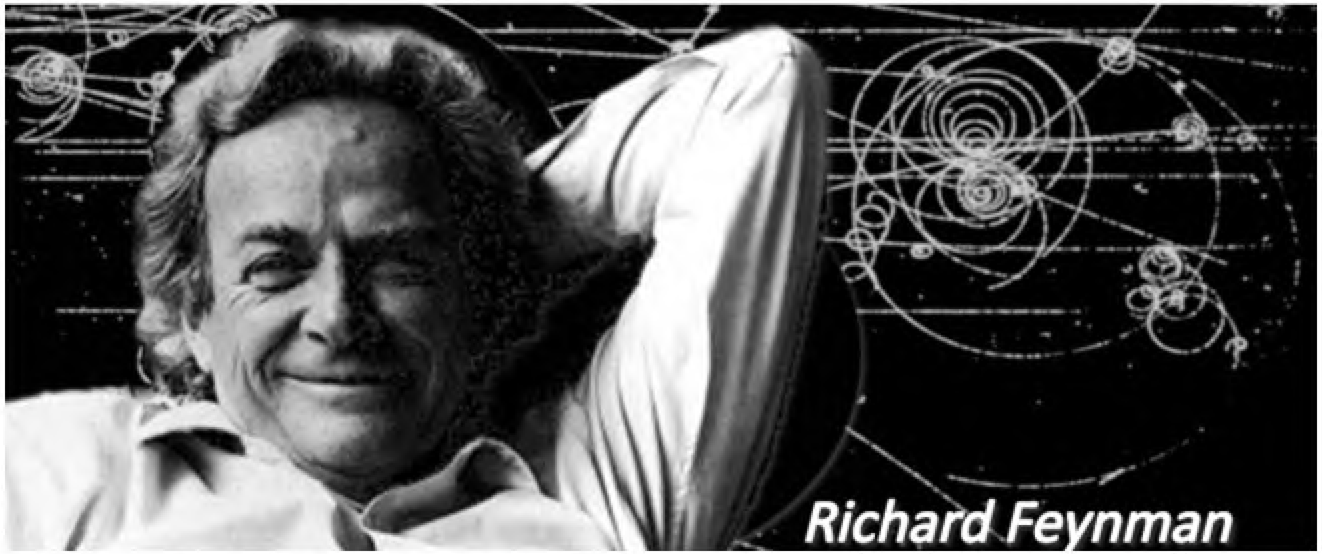
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس هفتم

واگرایی

Divergence

دانشگاه خوارزمی

واگراییِ میدانِ برداریِ F در هر نقطه را به صورتِ شارِ خالصِ خروجیِ F از واحدِ حجم، وقتی که این حجم حولِ آن نقطه به سمتِ صفر میل می‌کند، تعریف می‌کنیم:

$$div\boldsymbol{F} = \lim_{\Delta \mathrm{V} \to 0} \frac{\int_A \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da}{\Delta \mathrm{V}}$$

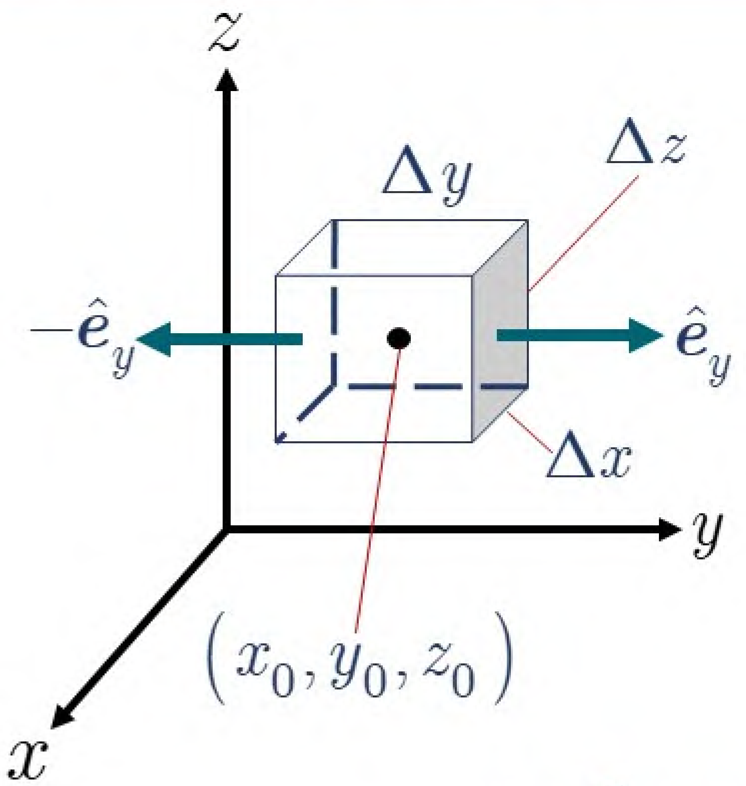
که A مساحتِ سطحی است که حجمِ ΔV را می‌سازد.

$divF$ یک میدانِ اسکالر است.

تعریفِ فوق مستقل از دستگاهِ مختصات است و می‌توان آن را برایِ نوشتنِ شکلِ تابعِ $divF$ در هر دستگاهِ مختصاتی به کار گرفت.

دانشگاه خوارزمی

شکلِ تابعِ $divF$ را در دستگاهِ مختصات کارتزین بنویسید.



می‌خواهیم واگراییِ میدانِ $\boldsymbol{F}$ را در نقطه‌ی $P(x_0,y_0,z_0)$ به دست آوریم.

مطابقِ شکل، مکعبی را با ابعادِ Δx و Δy و Δz در نظر می‌گیریم.

نقطه‌ی $P(x_0,y_0,z_0)$ در مرکزِ مکعب قرار دارد.

شارِ کلِ سطحِ مکعب برابر است با مجموعِ شارهایی که از هر یک از وجوهِ مکعب می‌گذرد:

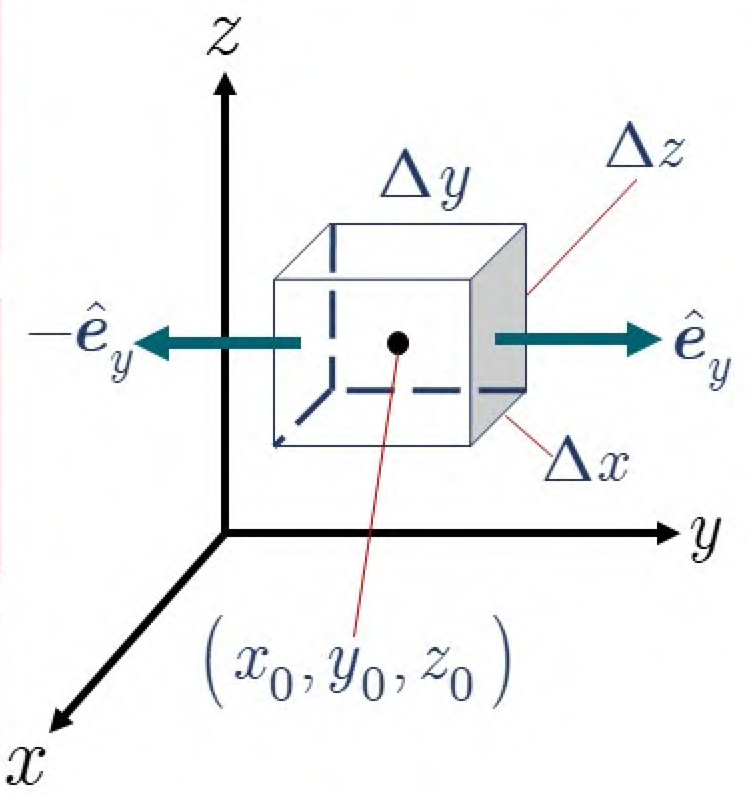
$$\boxed{\oint \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da = \int_1 \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da + \int_2 \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da + \int_3 \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da + \int_4 \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da + \int_5 \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da + \int_6 \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da}$$

هر یک از شش انتگرالِ فوق را حساب می‌کنیم

$$\int_1 \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da \approx \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x\Delta a_x = F_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0\right)\Delta y\Delta z$$
$$\int_2 \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da \approx \boldsymbol{F}\cdot\left(-\hat{\boldsymbol{e}}_x\right)\Delta a_x = -F_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0\right)\Delta y\Delta z$$

$$\int_3 \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da \approx \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y\Delta a_y = F_y\left(x_0,y_0+\frac{\Delta y}{2},z_0\right)\Delta x\Delta z$$
$$\int_4 \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da \approx \boldsymbol{F}\cdot\left(-\hat{\boldsymbol{e}}_y\right)\Delta a_y = -F_y\left(x_0,y_0-\frac{\Delta y}{2},z_0\right)\Delta x\Delta z$$

$$\int_5 \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da \approx \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z\Delta a_z = F_z\left(x_0,y_0,z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y$$
$$\int_6 \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da \approx \boldsymbol{F}\cdot\left(-\hat{\boldsymbol{e}}_z\right)\Delta a_z = -F_z\left(x_0,y_0,z_0-\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y$$



در هریک از روابطِ فوق، بسطِ تیلورِ مؤلفه‌های بردارِ $\boldsymbol{F}$ را حولِ نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) می‌نویسیم

$$F_x\left(x_0 \pm \tfrac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) = F_x\left(x_0, y_0, z_0\right) \pm \left.\frac{\partial F_x}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \frac{\Delta x}{2} + \cdots$$

$$F_y\left(x_0, y_0 \pm \tfrac{\Delta y}{2}, z_0\right) = F_y\left(x_0, y_0, z_0\right) \pm \left.\frac{\partial F_y}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \frac{\Delta y}{2} + \cdots$$

$$F_z\left(x_0, y_0, z_0 \pm \tfrac{\Delta z}{2}\right) = F_z\left(x_0, y_0, z_0\right) \pm \left.\frac{\partial F_z}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \frac{\Delta z}{2} + \cdots$$

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da \approx \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right]_{(x_0,y_0,z_0)} + \cdots$$

دانشگاه خوارزمی

در نهایت واگرایی میدانِ $\boldsymbol{F}$ در نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{div\boldsymbol{F}\,\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{\Delta x\Delta y\Delta z\to 0}\frac{\oint_A \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da}{\Delta x\Delta y\Delta z} = \left[\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right]_{(x_0,y_0,z_0)}}$$

و برای هر نقطه‌ی دلخواهِ $\boldsymbol{r}= (x,y,z)$ می‌توان نوشت:

$$\boxed{div\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}}$$

دانشگاه خوارزمی

با توجه به نتیجه‌ی به دست آمده برای واگراییِ میدان، دیده می‌شود که گویی عمل‌گرِ گرادیان در میدانِ مزبور ضربِ نقطه‌ای شده است. از این رو عمل‌گرِ واگرایی را با نمادِ $\cdot\ \nabla$ نشان می‌دهیم:

$$\boxed{div\boldsymbol{F} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{F}}$$

بدین ترتیب در دستگاهِ مختصاتِ کارتزین می‌توان نوشت:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

دانشگاه خوارزمی

به عنوانِ تمرین نشان دهید که شکلِ عملگرِ واگرایی در دستگاه‌های مختصاتِ استوانه‌ای و کروی به صورت زیر است:

عمل‌گرِ واگرایی در دستگاهِ مختصاتِ استوانه‌ای

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_{\rho})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_{\phi}}{\partial\phi}+\frac{\partial F_{z}}{\partial z}$$

عمل‌گرِ واگرایی در دستگاهِ مختصاتِ کروی

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_{r})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_{\theta})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_{\phi}}{\partial\phi}$$

واگراییِ بردارِ مکان r را پیدا کنید:

الف) در دستگاهِ مختصاتِ کارتزین و ب) در دستگاهِ مختصاتِ کروی

حل:

الف)

$$\boxed{\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{e}}_x + y\hat{\boldsymbol{e}}_y + z\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3}$$

ب)

$$\boxed{\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^3}{\partial r} = 3}$$

دانشگاه خوارزمی

نشان دهید اگر $r\neq 0$ باشد، آن‌گاه

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = 0$$

حل:

$$\boxed{\nabla \cdot \left(f\boldsymbol{F}\right) = (\nabla f)\cdot \boldsymbol{F} + f\nabla \cdot \boldsymbol{F}}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\cdot \boldsymbol{r} + \left(\frac{1}{r^3}\right)\nabla \cdot \boldsymbol{r} \quad \to 3$$

$$\boxed{\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \hat{e}_r \frac{-3}{r^4}}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \frac{-3}{r^4}\hat{e}_r \cdot \boldsymbol{r} + \left(\frac{1}{r^3}\right)3 = 0; \qquad r \neq 0}$$

دانشگاه خوارزمی

واگرایی میدان برداری زیر را حساب کنید

$$\boldsymbol{F} = \frac{2}{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + r\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

حل:

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(2r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin^2\theta\cos\phi) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial r}{\partial\phi}}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{2}{r^2} + 2\cos\theta\cos\phi}$$

دانشگاه خوارزمی

واگرایی میدان برداری زیر را حساب کنید $\boldsymbol{F} = \rho^2 \sin\phi \hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \rho^2 \cos\phi \hat{\boldsymbol{e}}_\phi + z^2 \hat{\boldsymbol{e}}_z$

حل:

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^3 \sin\phi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho^2 \cos\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z}}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 3\rho \sin\phi - \rho \sin\phi + 2z}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 2\rho \sin\phi + 2z}$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید