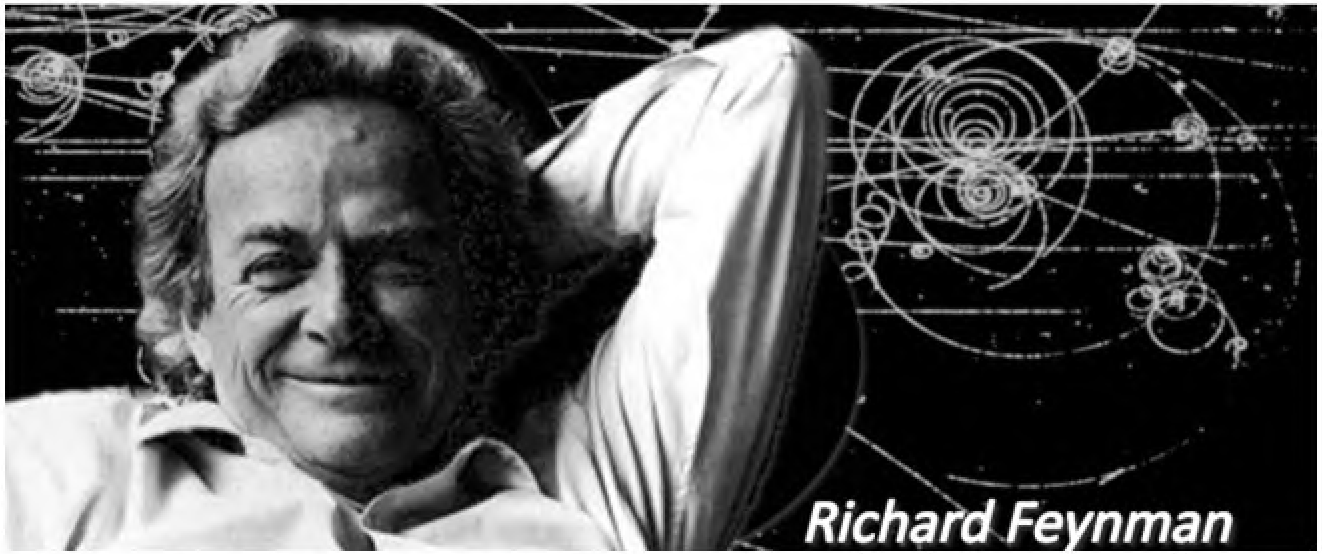
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

دانشگاه خوارزمی

درس هشتم

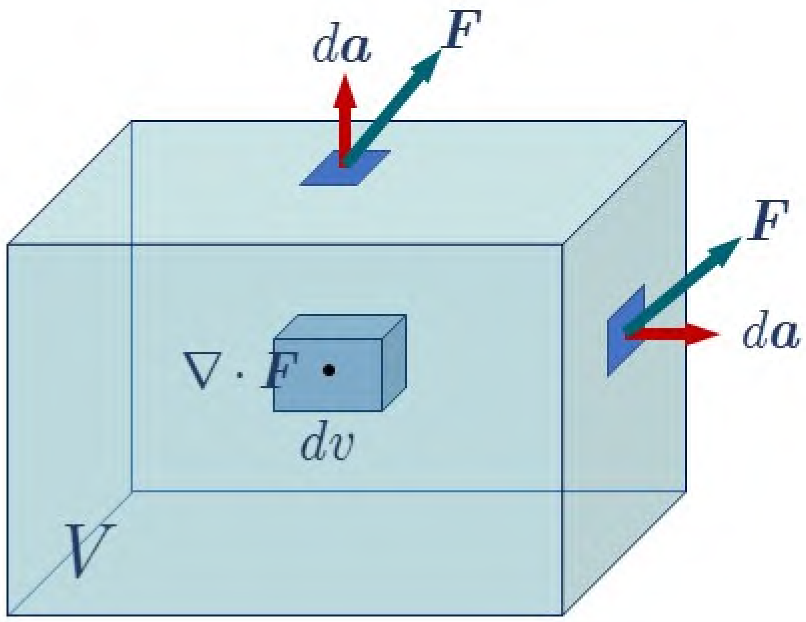
قضیه‌ی واگرایی

Divergence Theorem

دانشگاه خوارزمی

قضیه‌ی واگرایی: انتگرال واگرایی یک میدانِ برداری مانند $\boldsymbol{F}$ ، درونِ حجمِ V برابر است با انتگرالِ سطحیِ مؤلفه‌ی قائمِ آن میدان برداری بر روی سطحی که حجمِ V را در بر می‌گیرد.

$$\boxed{\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dv = \oint_A \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da}$$



برهان: اگر حجمِ مورد نظر بسیار کوچک باشد، طبقِ تعریف واگریی، قضیه ثابت می‌شود.

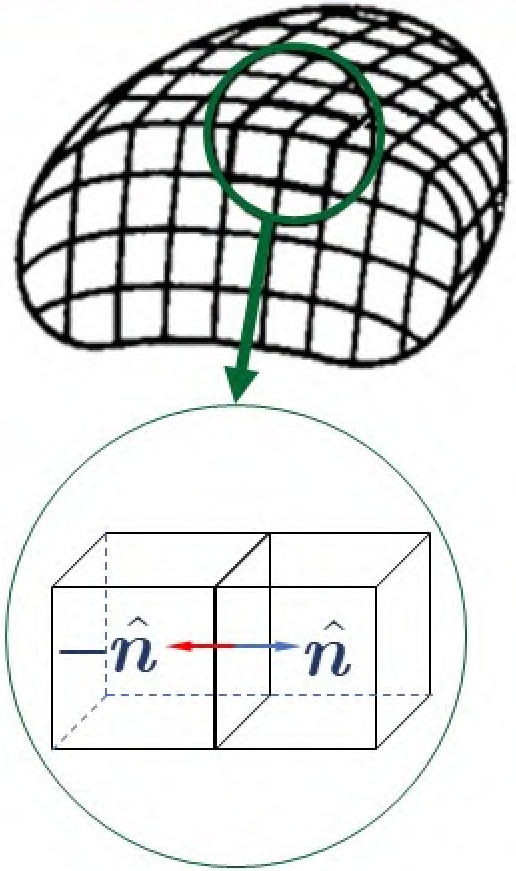
$$\boxed{\int_{\Delta V} \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dv = \nabla \cdot \boldsymbol{F} \Delta V}$$

اما طبق تعریف واگرایی

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\oint_A \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da}{\Delta V} \Rightarrow (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) \Delta V = \oint_A \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da}$$

$$\boxed{\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dv = \oint_A \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da}$$

دانشگاه خوارزمی



برای یک حجمِ بزرگ، آن را به عناصر حجمیِ کوچک ΔV_i که با سطوح A_i محصور شده‌اند، تقسیم می‌کنیم.

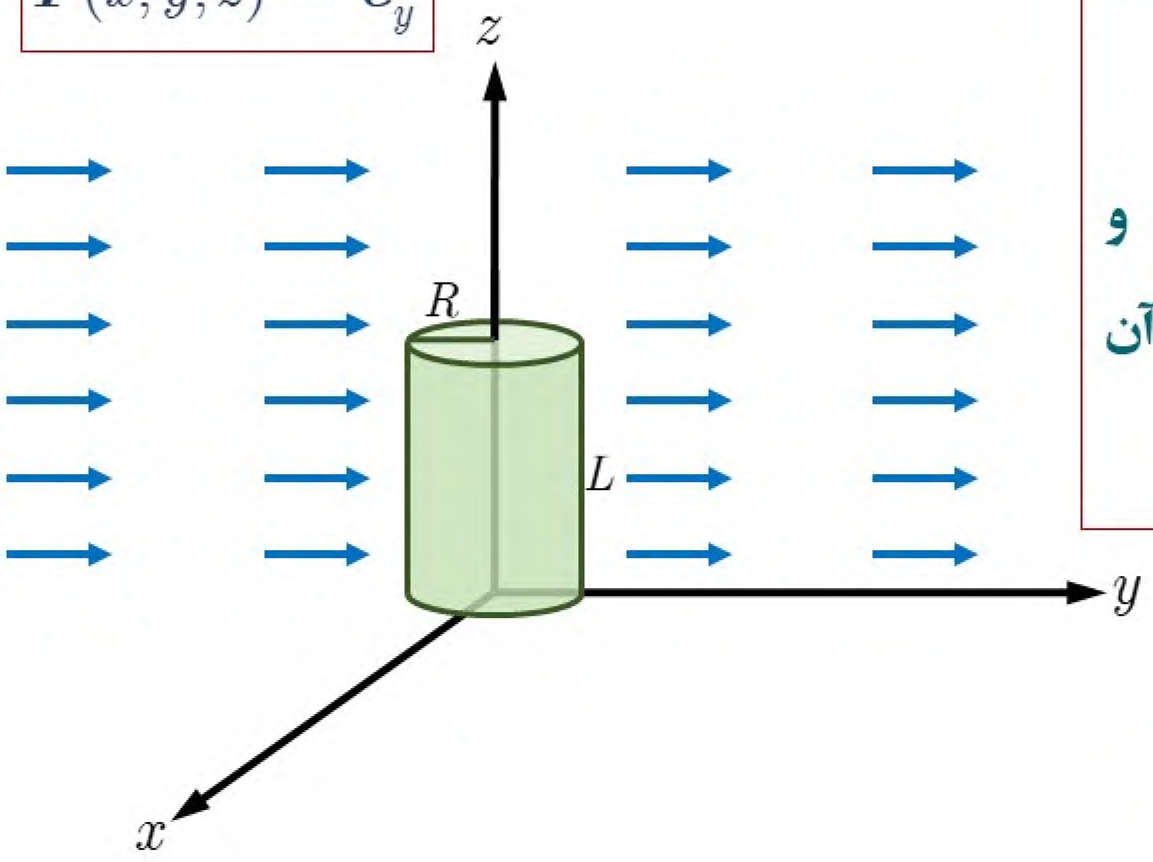
برای هریک از این حجم‌های کوچک، طبق، تعریفِ واگرایی می‌توان نوشت:

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_i = \frac{\oint_{A_i} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da}{\Delta v_i} \Rightarrow (\nabla\cdot\boldsymbol{F})_i\Delta v_i = \oint_{A_i}\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da$$

$$\sum_i(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_i\Delta v_i = \sum_i\oint_{A_i}\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da \longrightarrow \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dv = \oint_A \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\hat{\boldsymbol{e}}_y$$



در ناحیه‌ای از فضا میدان برداری یکنواخت به شکل زیر وجود دارد

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

اعتبار قضیه‌ی واگرایی را برای یک سطح استوانه‌ای به شعاعِ R و ارتفاع L که محور آن بر محور z منطبق است و قاعده‌ی پائین آن در $z=0$ و قاعده‌ی بالای آن در $z=1$ منطبق است، بررسی کنید.

واضح است که واگرایی این میدان صفر است:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}(x,y,z)=\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y=0$$

یعنی واگرایی این میدان در تمام نقاط درون استوانه صفر است.

پس انتگرال حجمی در قضیه‌ی واگرایی صفر می‌شود. $\int\nabla\cdot\boldsymbol{F}dv=0$

از سوی دیگر

$$\boxed{\oint \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da = \int_{\text{سطح جانبی}} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\mathbf{e}}_\rho R d\phi dz + \int_{\text{قاعده‌ی بالا}} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\mathbf{e}}_z \rho d\rho d\phi + \int_{\text{قاعده‌ی پایین}} \boldsymbol{F}\cdot(-\hat{\mathbf{e}}_z)\rho d\rho d\phi}$$

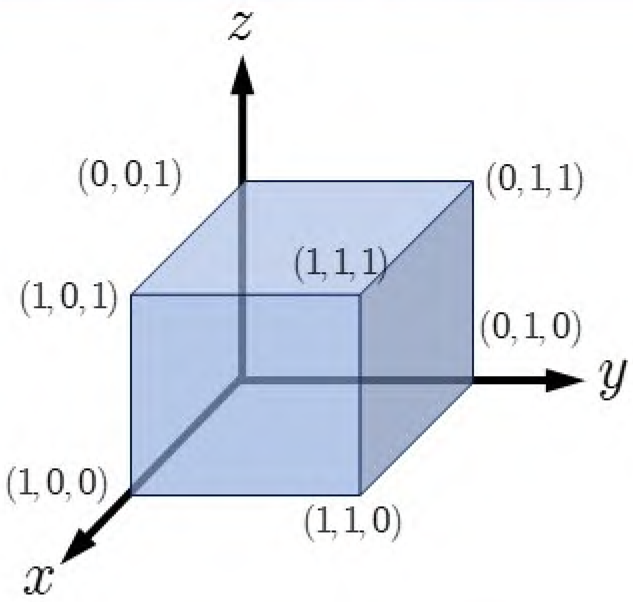
اما $\hat{\boldsymbol{e}}_y\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z = ۰$ و $\hat{\boldsymbol{e}}_y\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \sin\phi$

$$\boxed{\oint \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da = \int_{\text{سطح جانبی}} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\mathbf{e}}_\rho R d\phi dz = \int_۰^L \int_۰^{۲\pi} R\sin\phi d\phi = ۰}$$

دیده می‌شود که انتگرال سطحی نیز در قضیه‌ی واگرایی صفر می‌شود. یعنی درستی قضیه‌ی واگرایی تأیید می‌شود.

$$\boxed{\int_V \vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}dv = \oint_A \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a}}$$

دانشگاه خوارزمی



میدان برداری زیر را در نظر بگیرید

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = x^2\hat{\boldsymbol{e}}_x + y^2\hat{\boldsymbol{e}}_y + z^2\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

اعتبار قضیه‌ی واگرایی را برای مکعبی که با روابط زیر مشخص می‌شود، بررسی کنید.

حل:

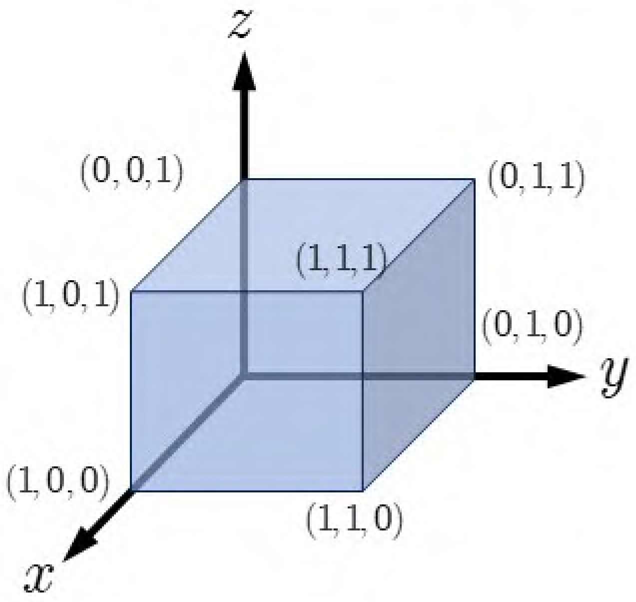
$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}(x,y,z) = 2x + 2y + 2z$$

$$\boxed{\int\nabla\cdot\boldsymbol{F}dv = 2\int_0^1 xdx\int_0^1 dy\int_0^1 dz + 2\int_0^1 dx\int_0^1 ydy\int_0^1 dz + 2\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 2dz}$$

$$\boxed{\int\nabla\cdot\boldsymbol{F}dv = 1+1+1 = 3}$$

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = x^2\hat{\boldsymbol{e}}_x + y^2\hat{\boldsymbol{e}}_y + z^2\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\boxed{\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a} = \int_{a_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a} + \int_{a_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a} + \int_{a_3}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a} + \int_{a_4}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a} + \int_{a_5}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a} + \int_{a_6}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a}}$$



$$x = 1 \rightarrow \int_{a_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a} = \int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1}(\hat{\boldsymbol{e}}_x + y^2\hat{\boldsymbol{e}}_y + z^2\hat{\boldsymbol{e}}_z)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x dydz$$
$$= \int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1} dydz = 1$$

$$x = 0 \rightarrow \int_{a_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a} = \int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1}(y^2\hat{\boldsymbol{e}}_y + z^2\hat{\boldsymbol{e}}_z)\cdot(-\hat{\boldsymbol{e}}_x)dydz = 0$$

$$y = 1 \rightarrow \int_{a_3}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a} = \int_{x=0}^{x=1}\int_{z=0}^{z=1}(x^2\hat{\boldsymbol{e}}_x + \hat{\boldsymbol{e}}_y + z^2\hat{\boldsymbol{e}}_z)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y dxdz$$
$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{z=0}^{z=1} dxdz = 1$$

$$y = 0 \rightarrow \int_{a_4}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a} = \int_{x=0}^{x=1}\int_{z=0}^{z=1}(x^2\hat{\boldsymbol{e}}_x + z^2\hat{\boldsymbol{e}}_z)\cdot(-\hat{\boldsymbol{e}}_y)dxdz = 0$$

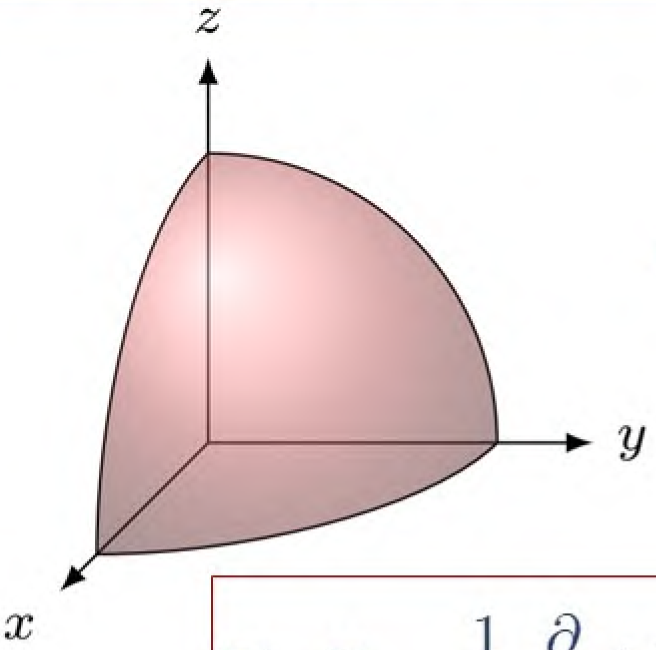
$$z = 1 \rightarrow \int_{a_5} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} (x^2 \hat{\boldsymbol{e}}_x + y^2 \hat{\boldsymbol{e}}_y + \hat{\boldsymbol{e}}_z) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z dxdy$$
$$= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} dxdy = 1$$

$$z = 0 \rightarrow \int_{a_6} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} (x^2 \hat{\boldsymbol{e}}_x + y^2 \hat{\boldsymbol{e}}_y) \cdot (-\hat{\boldsymbol{e}}_z) dxdy = 0$$

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3$$

بنابر این برای این مسئله به دست آوردیم:

$$\int \nabla \cdot \boldsymbol{F} dv = \oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = 3$$



میدان برداری زیر را در نظر بگیرید

$$\boldsymbol{F} = r^2\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

اعتبار قضیه‌ی واگرایی را برای ناحیه‌ی یک هشتم کره که به شکل زیر مشخص می‌شود، بررسی کنید.

$$0 < r < 3; \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

حل:

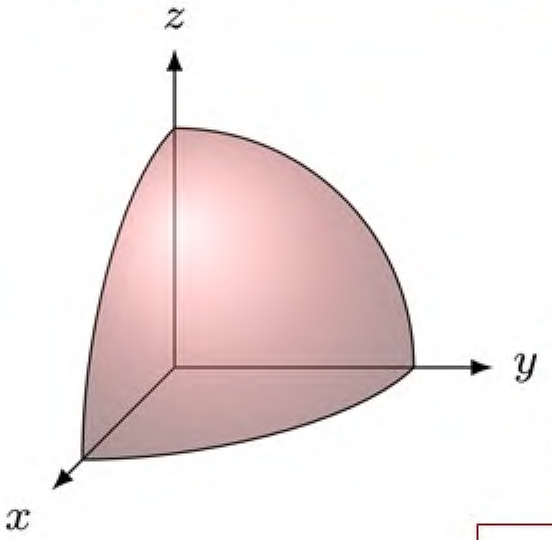
$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^4) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta r\sin\theta\cos\phi) + 0 = 4r + 2\cos\theta\cos\phi}$$

$$\boxed{\int\nabla\cdot\boldsymbol{F}dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3}(4r)r^2\sin\theta drd\theta d\phi + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3}(2\cos\theta\cos\phi)r^2\sin\theta drd\theta d\phi}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\int \nabla \cdot \boldsymbol{F} dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3} (4r) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3} (2\cos\theta\cos\phi) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$



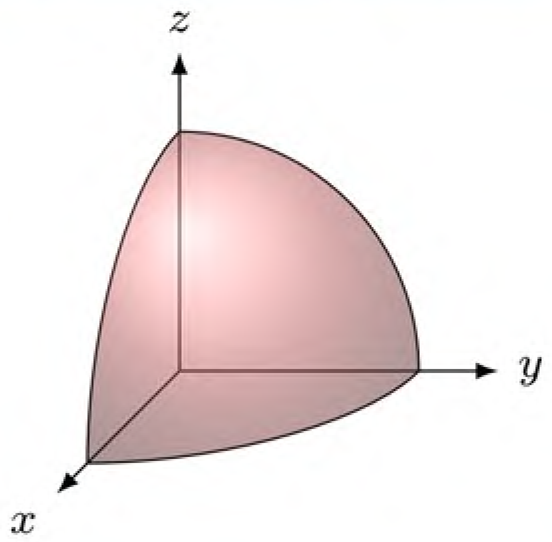
$$\int \nabla \cdot \boldsymbol{F} dv = 81\frac{\pi}{2} + 9 = 136.23$$

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_{a_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} + \int_{a_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} + \int_{a_3} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} + \int_{a_4} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a}$$

$$\phi = 0 \rightarrow \int_{a_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_{a_1} (r^2 \hat{\boldsymbol{e}}_r + r\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\theta) \cdot (-\hat{\boldsymbol{e}}_\phi da) = 0$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \int_{a_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_{a_1} (r^2 \hat{\boldsymbol{e}}_r + r\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\theta) \cdot (\hat{\boldsymbol{e}}_\phi da) = 0$$

دانشگاه خوارزمی



$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \int_{a_3} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_{a_1} (r^2 \hat{\boldsymbol{e}}_r + r \sin\theta \cos\phi \hat{\boldsymbol{e}}_\theta) \cdot (\hat{\boldsymbol{e}}_\theta da)$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{3} r \sin\frac{\pi}{2} \cos\phi r dr d\phi$$
$$= 9$$

$$r = 3 \rightarrow \int_{a_4} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_{a_4} (9\hat{\boldsymbol{e}}_r + 3 \sin\theta \cos\phi \hat{\boldsymbol{e}}_\theta) \cdot (\hat{\boldsymbol{e}}_r da)$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \times 9 \sin\theta d\theta d\phi$$
$$= 81\frac{\pi}{2}$$

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = 0 + 0 + 81\frac{\pi}{2} + 9 = 136.23$$

$$\int \nabla \cdot \boldsymbol{F} dv = \oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = 136.23$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید