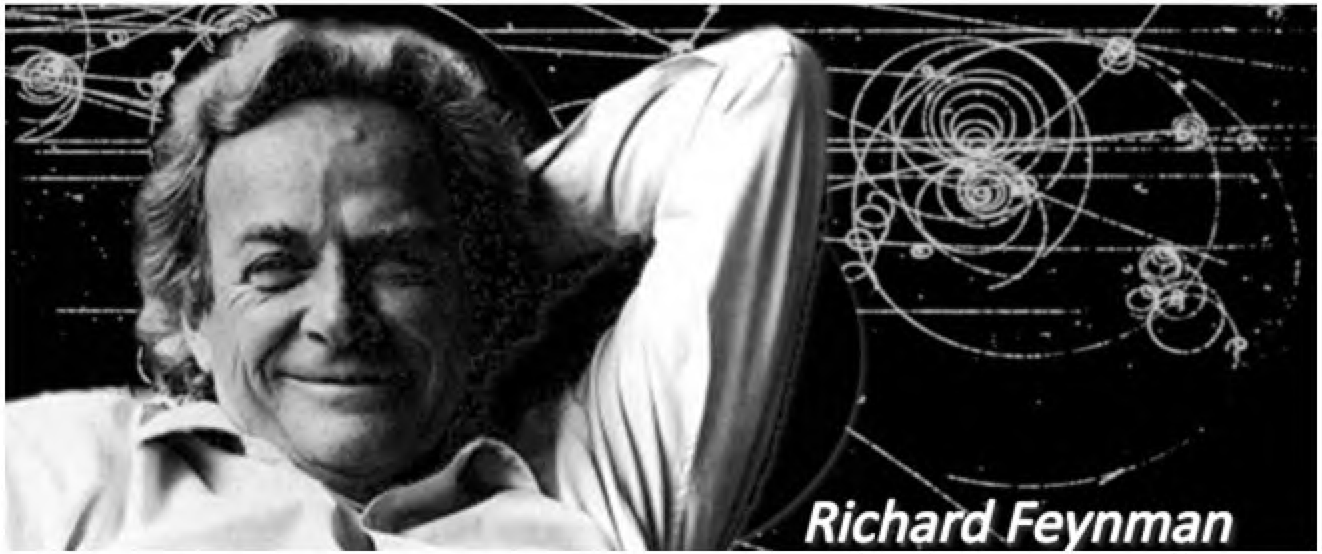
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس نهم

تاو (چرخش)

Curl (Rotation)

دانشگاه خوارزمی

تا این‌جا با دو عمل‌گرِ مهم، یعنی عمل‌گر دِل ∇ و عمل‌گر واگرایی $\nabla \cdot$ را معرفی کرده‌ایم.

سومین عمل‌گر مهم در الکترومغناطیس، عمل‌گر **تاو** یا **چرخش** است.

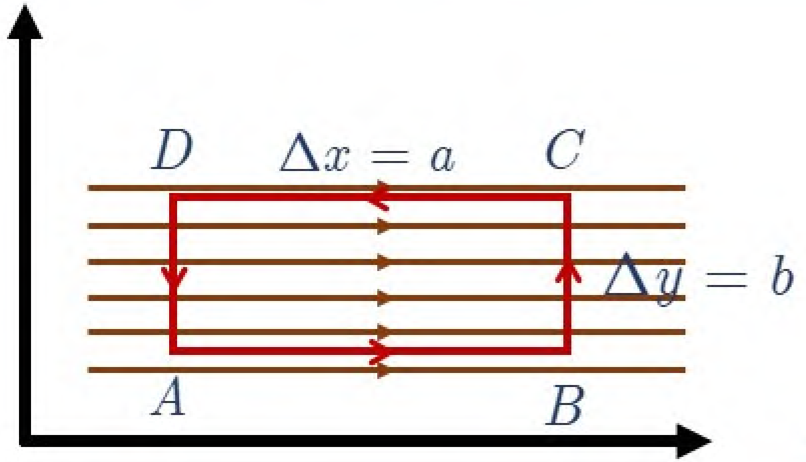
تاوِ یک میدان برداری بیان‌گر ویژگی دورانی یا چرخشی آن میدان برداری است.

ابتدا **انتگرال گردش** را تعریف می‌کنیم.

انتگرال گردشِ یک میدان برداری حول یک منحنی بسته برابر است با

$$\text{انتگرال گردش} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

یک میدان برداریِ یکنواخت در راستای محور x در نظر بگیرید.



$$\boldsymbol{F} = F_0 \hat{\boldsymbol{e}}_x$$

انتگرالِ گردشِ این میدان برداری را حول مستطیل نشان داده شده حساب کنید.

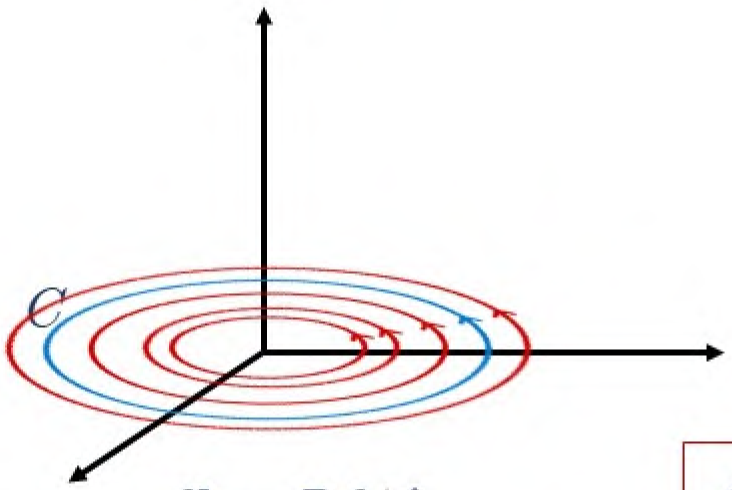
$$\oint_{ABCDA} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x dx + \int_B^C \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y dy + \int_C^D \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x dx + \int_D^A \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y dy$$

$$= F_0 a + 0 - F_0 a + 0$$

$$= 0$$

یک میدان برداریِ غیر یکنواخت به شکل زیر در نظر بگیرید.

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای



$d\boldsymbol{l} = Rd\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

انتگرالِ گردشِ این میدان برداری را حول دایره‌ای به شعاع R حساب کنید.

$$\oint_C \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{R}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\right)\cdot\left(Rd\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= 2\pi$$

تاوِ هر میدانِ برداری $\boldsymbol{F}$ را در هر نقطه، به شکل زیر تعریف می کنیم

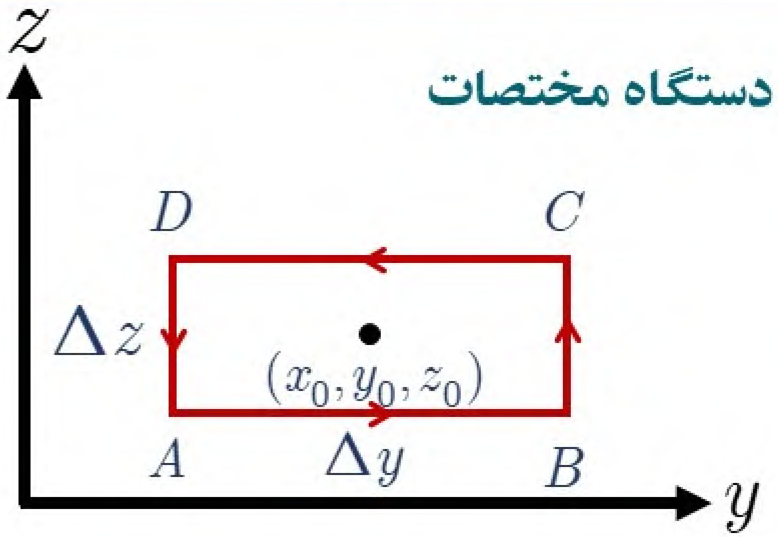
حولِ نقطه‌ی مورد نظر یک منحنیِ بسته C با مساحت ΔA_n در نظر می گیریم.

انتگرال گردشِ میدانِ $\boldsymbol{F}$ را روی این منحنی حساب می کنیم. $\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}$

اگر $\boldsymbol{e}_n$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح ΔA_n باشد، تاوِ میدان برداری $\boldsymbol{F}$ در نقطه‌ی مزبور، به صورت برداری تعریف می‌شود که تصویر آن بر راستای $\boldsymbol{e}_n$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\boxed{\boldsymbol{e}_n \cdot (\overrightarrow{\mathrm{curl}}\boldsymbol{F}) = (\overrightarrow{\mathrm{curl}}\boldsymbol{F})_n = \lim_{\Delta A_n \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta A_n}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\boldsymbol{F} \equiv \overrightarrow{\mathrm{curl}}\,\boldsymbol{F}$$

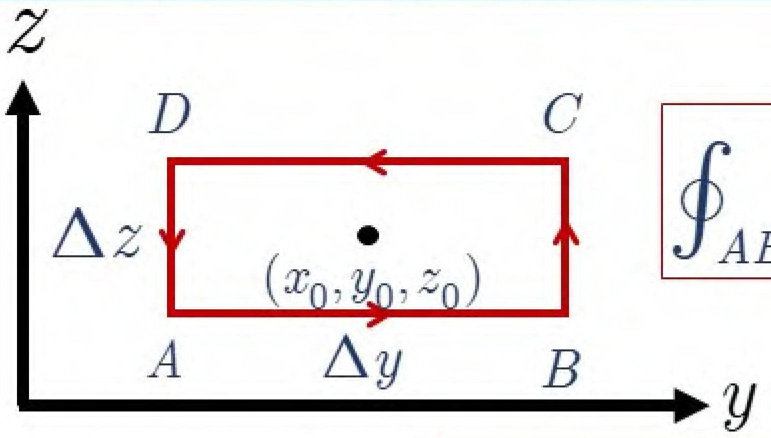


تاوِ هر میدانِ برداری، خود یک میدان برداری است. می‌خواهیم مؤلفه‌های آن را در دستگاه مختصات کارتزین پیدا کنیم.

$$\boldsymbol{e}_x \cdot (\overrightarrow{\mathrm{curl}}\boldsymbol{F}) = (\overrightarrow{\mathrm{curl}}\boldsymbol{F})_x = \lim_{\Delta A_x \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta A_x}$$

$$\Delta A_x = \Delta z \Delta y$$

$$\oint_{ABCD} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_B^C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_C^D \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_D^A \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$



$$\oint_{ABCD} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_B^C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_C^D \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_D^A \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B F_y(x_0, y, z_0 - \tfrac{\Delta z}{2})dy \approx F_y(x_0, y_0, z_0 - \tfrac{\Delta z}{2})\Delta y$$

$$\int_B^C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B F_z(x_0, y_0 + \tfrac{\Delta y}{2}, z)dz \approx F_z(x_0, y_0 + \tfrac{\Delta y}{2}, z_0)\Delta z$$

$$\int_C^D \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_C^D F_y(x_0, y, z_0 + \tfrac{\Delta z}{2})dy \approx -F_y(x_0, y_0, z_0 + \tfrac{\Delta z}{2})\Delta y$$

$$\int_D^A \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_D^A F_z(x_0, y_0 - \tfrac{\Delta y}{2}, z)dz \approx -F_z(x_0, y_0 - \tfrac{\Delta y}{2}, z_0)\Delta z$$

حال بسط تیلور مؤلفه‌های F را حول نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) می‌نویسیم.

$$F_y(x_0, y_0, z_0 - \tfrac{\Delta z}{2}) = F_y(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial F_y}{\partial z}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} + \cdots$$

$$F_y(x_0, y_0, z_0 + \tfrac{\Delta z}{2}) = F_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial F_y}{\partial z}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} + \cdots$$

$$F_z(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0) = F_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} + \cdots$$

$$F_z(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0) = F_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} + \cdots$$

دانشگاه خوارزمی

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} \approx F_y(x_0,y_0,z_0-\tfrac{\Delta z}{2})\Delta y = F_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y - \Delta y\,\frac{\Delta z}{2}\frac{\partial F_y}{\partial z}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} + \cdots$$

$$\int_B^C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} \approx F_z(x_0,y_0+\tfrac{\Delta y}{2},z_0)\Delta z = F_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z + \Delta z\,\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} + \cdots$$

$$\int_C^D \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} \approx -F_y(x_0,y_0,z_0+\tfrac{\Delta z}{2})\Delta y = -F_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y - \Delta y\,\frac{\Delta z}{2}\frac{\partial F_y}{\partial z}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} + \cdots$$

$$\int_D^A \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} \approx -F_z(x_0,y_0-\tfrac{\Delta y}{2},z_0)\Delta z = -F_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z + \Delta z\,\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} + \cdots$$

$$\oint_{ABCD} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = \Delta z\Delta y\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} + \cdots$$

دانشگاه خوارزمی

$$\oint_{ABCD} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \Delta z \Delta y \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \Bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \cdots$$

$$\boldsymbol{e}_x \cdot (\overrightarrow{\mathrm{curl}} \boldsymbol{F}) = (\overrightarrow{\mathrm{curl}} \boldsymbol{F})_x = \lim_{\Delta A_x \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta A_x}$$

$$\Delta A_x = \Delta z \Delta y$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{curl}} \boldsymbol{F})_x = \lim_{\Delta z \Delta y \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta z \Delta y} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \Bigg|_{(x_0, y_0, z_0)}$$

$$(\overrightarrow{\text{curl}}\boldsymbol{F})_x = \lim_{\Delta z\Delta y\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta z\Delta y} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

$$(\overrightarrow{\text{curl}}\boldsymbol{F})_y = \lim_{\Delta x\Delta z\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta x\Delta z} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

$$(\overrightarrow{\text{curl}}\boldsymbol{F})_z = \lim_{\Delta y\Delta x\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta y\Delta x} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

$$(\overrightarrow{\text{curl}}\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

دانشگاه خوارزمی

$$(\overrightarrow{\mathrm{curl}}\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

این رابطه نشان می‌دهد که اثرِ عمل‌گرِ تاو بر یک میدانِ برداری ظاهراً با ضربِ برداریِ عمل‌گرِ دِل ∇ در آن بردار به دست می‌آید. به همین خاطر عملگرِ تاو را با نمادِ $\nabla\times$ نیز نشان می‌دهیم. اما باید توجه کرد که در دستگاهِ مختصاتِ کارتزین عمل‌گرِ تاو مانند ضربِ برداریِ گرادیان است و لزوماً در دستگاه‌های مختصاتِ دیگر چنین نیست. اگر چه از این به بعد تاو را با نمادِ $\nabla\times$ نشان خواهیم داد اما توجه می‌کنیم که این خود یک عمل‌گر است و به معنیِ ضربِ برداریِ عمل‌گرِ گرادیان نیست. معمولاً برای سادگی، نتیجه‌ی اخیر را با استفاده از نمادگذاریِ دترمینان به شکلِ زیر می‌نویسیم:

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

دانشگاه خوارزمی

تاو میدان برداری زیر را در نقطه‌ی(2,-2,1) بیابید.

$$\boldsymbol{F} = yz^2\hat{\boldsymbol{e}}_x + (2xy-3)\hat{\boldsymbol{e}}_y + y\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

حل:

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})_x = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right) = 1-0$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})_y = \left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right) = 2yz-0$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})_z = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 2y-z^2$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{e}}_x + 2yz\hat{\boldsymbol{e}}_y + (2y-z^2)\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F}\Big|_{(2,-2,1)} = \hat{\boldsymbol{e}}_x - 4\hat{\boldsymbol{e}}_y - 5\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

برای به دست آوردنِ مؤلفه‌های عمل‌گرِ تاو در دستگاهِ مختصاتِ استوانه‌ای می‌توان، مانندِ آن‌چه در موردِ دستگاهِ کارتزین انجام دادیم، مستقیماً از تعریفِ تاو استفاده کرد.

راه دیگر این است که از نتیجه‌ی به دست آمده برای دستگاهِ مختصاتِ کارتزین و روابطِ مربوط به تبدیلاتِ دستگاهِ مختصات، استفاده کنیم.

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{e}}_x = \cos\hat{\boldsymbol{e}}_\rho - \sin\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \\ \hat{\boldsymbol{e}}_y = \sin\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{e}}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$
$$z = z$$

$$\begin{cases} F_x = \cos\phi F_\rho - \sin\phi F_\phi \\ F_y = \sin\phi F_\rho + \cos\phi F_\phi \\ F_z = F_z \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\phi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{e}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \boldsymbol{e}_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \boldsymbol{e}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

ابتدا بردارهای یکه را به مختصات استوانه‌ای تبدیل و جملات را مرتب می‌کنیم

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{F} = \; & \hat{\boldsymbol{e}}_\rho \left[\cos\phi \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \sin\phi \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \right] \\ & + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \left[\sin\phi \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \cos\phi \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \right] \\ & + \hat{\boldsymbol{e}}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\nabla\times \boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{e}}_\rho\left[\cos\phi\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\sin\phi\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\right]$$
$$+\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\left[\sin\phi\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\cos\phi\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\right]$$
$$+\hat{\boldsymbol{e}}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

از سوی دیگر

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)=\sin\phi\left(\frac{\partial F_z}{\partial \rho}-\frac{\partial F_\rho}{\partial z}\right)+\cos\phi\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \phi}-\frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)=\cos\phi\left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)-\sin\phi\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial \phi}\right)$$

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)=\left(\frac{1}{\rho}F_\phi+\frac{\partial F_\phi}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right)=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho}-\frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right)$$

دانشگاه خوارزمی

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{e}}_\rho \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) + \hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right)$$

که معمولاً آن را برای سادگی با نمادگذاریِ دترمینان به شکلِ زیر می‌نویسیم:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_\rho & \rho \hat{\boldsymbol{e}}_\phi & \hat{\boldsymbol{e}}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

شکل عملگرِ تاو در دستگاه مختصاتِ استوانه‌ای

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta F_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

که معمولاً آن را برای سادگی با نمادگذاریِ دترمینان به شکلِ زیر می‌نویسیم:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_r & r\hat{\boldsymbol{e}}_\theta & r\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta \end{vmatrix}$$

شکل عملگر تاو در دستگاه مختصات کروی

برخی از ویژگی‌های عملگرِ تاو عبارت‌اند از:

$$\boxed{\nabla \times (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = \nabla \times \boldsymbol{F} + \nabla \times \boldsymbol{G}}$$

$$\boxed{\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{G})\boldsymbol{F} - (\nabla \cdot \boldsymbol{F})\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G}}$$

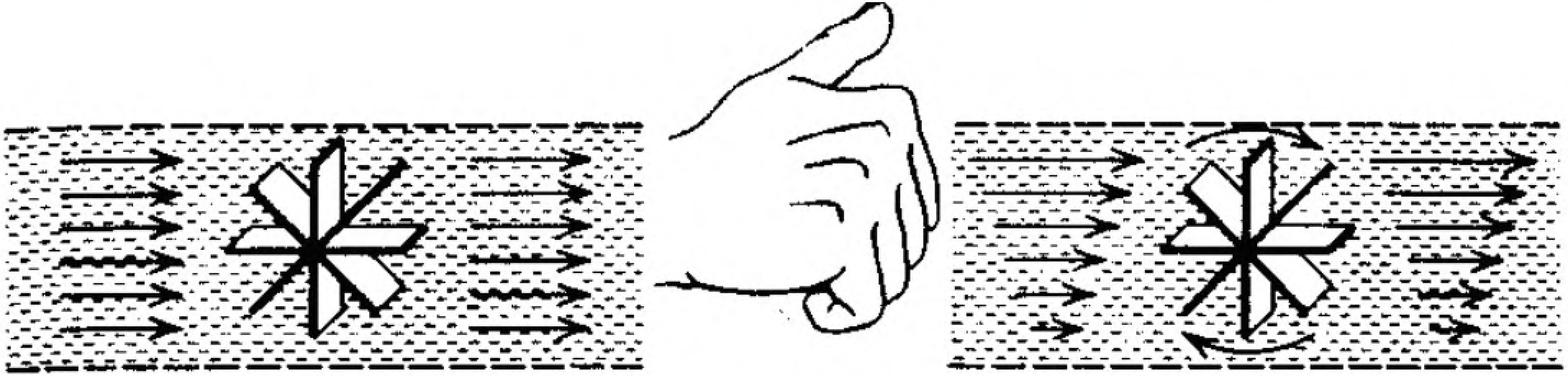
$$\boxed{\nabla \times (f\boldsymbol{F}) = \nabla f \times \boldsymbol{F} + f\nabla \times \boldsymbol{F}}$$

واگراییِ تاوِ هر میدانِ برداری برابر با صفر است: $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0$

تاوِ گرادیانِ یک تابعِ اسکالر برابر با صفر است: $\nabla \times \nabla f = 0$

دانشگاه خوارزمی

تعبیر فیزیکی تاو (چرخش) یک میدان برداری



شاد و مهربان باشید