

## شماره‌ی تکلیف: ۳

یادآوری: نماد کرونکر  $\delta_{ij}$  و نماد لوی-چیویتا  $\epsilon_{ijk}$  به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk = 123, 231, 312 \\ 0 & \text{در صورتی که حداقل دو اندیس برابر باشند} \\ -1 & ijk = 132, 213, 321 \end{cases}$$

## مسئله‌ی ۱:

مقدار هر یک از عبارات زیر را حساب کنید.

$$\text{الف) } \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = ?$$

$$\text{ج) } \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{mjk} = ?$$

$$\text{ب) } \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \epsilon_{ijk} = ?$$

$$\text{د) } \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = ?$$

## مسئله‌ی ۲:

نشان دهید

$$\hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) = \epsilon_{ijk}$$

که در آن  $\hat{e}_n$  ها ( $n = 1, 2, 3$ ) بردارهای واحد متعامد راستگرد با ترتیب 1, 2, 3 هستند.

## مسئله‌ی ۳:

نشان دهید

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

## مسئله ۴:

درستی هر یک از اتحادهای زیر را بررسی کنید. (از نمادگذاری کرونکر و لوی-چیویتا استفاده کنید)

$$\text{الف) } \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

$$\text{ب) } \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\text{ج) } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

پاسخ ۴: الف)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \sum_{k=1}^3 A_k (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_k \\ &= \sum_{k=1}^3 A_k \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ijk} B_i C_j \\ &= \sum_{i=1}^3 B_i \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{jki} C_j A_k \quad (\text{توجه کنید که } \epsilon_{jki} = \epsilon_{ijk}) \\ &= \sum_{i=1}^3 B_i (\mathbf{C} \times \mathbf{A})_i \\ &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \end{aligned}$$