

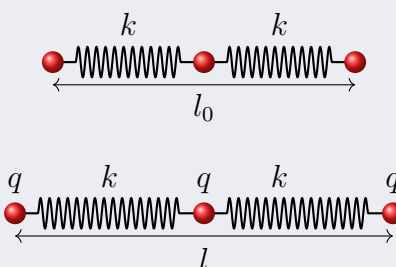
شماره‌ی تکلیف: ۹

مسئله‌ی ۱:

سه ذره‌ی آزاد با بارهای الکتریکی یکسان $q = 10^{-6} \text{C}$ را در رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار داده‌ایم. مکان و مقدار و علامت بار چهارم Q را به گونه‌ای پیدا کنید که همه‌ی بارهای الکتریکی در تعادل باشند.

مسئله‌ی ۲:

سه گلوله‌ی مشابه، مطابق شکل به دو فنر یکسان وصل شده‌اند. گلوله‌ها و فنر بر روی خط راست افقی قرار دارند. سختی فنرها برابر با k است. ابتدا فاصله‌ی دورترین گلوله‌ها l_0 است. اگر گلوله‌ها با بار الکتریکی هم اندازه و هم نام باردار شوند، فاصله‌ی دورترین گلوله‌ها برابر با l می‌شود. اندازه‌ی بار این گلوله‌ها را پیدا کنید.

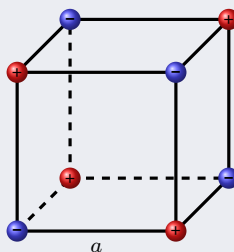


پاسخ ۲:

$$q = l \sqrt{\frac{2}{5} \pi \epsilon_0 k (l - l_0)}$$

مسئله‌ی ۳:

بارهای نقطه‌ای $+q$ و $-q$ مطابق شکل زیر در رئوس مکعبی به ضلع $a = 2.8 \times 10^{-10} \text{m}$ به طور یک در میان قرار گرفته‌اند. اندازه‌ی نیروی الکتریکی وارد بر هر یک از این بارها را (از طرف هفت بار دیگر) حساب کنید.



پاسخ ۳:

$$|F| = 1.34 \times 10^{-9} \text{N}$$

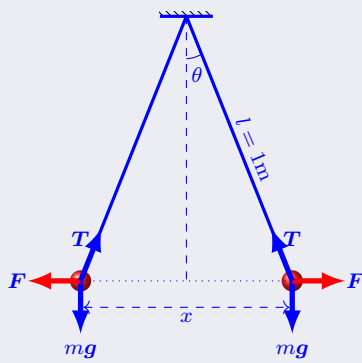
مسئله ۴:

دو گلوله کوچک، هر یک به جرم $m = 10 \text{ g}$ با نخ‌های نارسای سبکی به طول $l = 1 \text{ m}$ از یک نقطه‌ی مشترک آویزان شده‌اند. هرگاه به این گلوله‌ها بارهای منفی و مساوی داده شود، زاویه‌ی هر نخ با امتداد قائم 20° خواهد شد.

- الف) با رسم نموداری، نیروهای وارد بر هر گلوله را مشخص کنید.
- ب) اندازه‌ی بار هر گلوله را به دست آورید.
- ج) حال اگر طول نخ‌ها را نصف کنیم، زاویه‌ی جدیدی را که هر نخ با امتداد قائم می‌سازد پیدا کنید.

پاسخ ۴:

الف) دیاگرام نیروها در شکل زیر رسم شده است.



ب) چون سیستم در حال تعادل است، برآیند نیروهای وارد بر هر یک از گلوله‌ها صفر است:

$$\mathbf{F} + \mathbf{T} + m\mathbf{g} = 0$$

$$T \sin \theta = F$$

$$T \cos \theta = mg$$

رابطه‌ی اول بر رابطه‌ی دوم تقسیم می‌کنیم:

$$\tan \theta = \frac{F}{mg}$$

نیروی الکتریکی بین دو بار برابر است با

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

در نتیجه:

$$\tan \theta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2 mg}$$

از سوی دیگر $x = 2l \sin \theta$ ، بنابراین:

$$\tan \theta = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 \sin^2 \theta mg} \implies q^2 = 16\pi\epsilon_0 l^2 \sin^2 \theta \tan \theta mg$$

$$\begin{aligned}
 q &= \sqrt{16\pi\epsilon_0(1\text{m})^2(\sin 20^\circ)^2(\tan 20^\circ)(10^{-2}\text{kg})(9.8\text{N/kg})} \\
 &= 1.36 \times 10^{-6}\text{C} \\
 &= 1.36\mu\text{C}
 \end{aligned}$$

ج) در این حالت $q = 1.36\mu\text{C}$ ، $l = 0.5\text{m}$ و مجهول مسئله زاویه θ است. همان طور که در قسمت قبل دیدیم، شرط تعادل به شکل زیر است:

$$\tan \theta \sin^2 \theta = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 mg}$$

مقادیر عددی کمیت ها را در معادله ی فوق قرار می دهیم. در نتیجه:

$$\tan \theta \sin^2 \theta = 0.17$$

حل این معادله به شکل تحلیلی ساده نیست. برای حل آن روش های عددی مختلفی وجود دارد. در اینجا سعی می کنیم یک پاسخ تقریبی برای آن به دست آوریم. فرض می کنیم زاویه θ کوچک باشد. در این صورت: $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ بنابر این:

$$\theta^3 = 0.17 \implies \theta = 0.554\text{rad}$$

$$\theta \approx 32^\circ$$

دیده می شود که مقدار به دست آمده برای θ کوچک نیست. بنابر این فرض اولیه مان درست نبوده. این مقدار را در معادله قرار می دهیم:

$$\sin^2(32^\circ) \tan(32^\circ) = 0.18$$

به نظر می رسد عدد 32° خیلی هم از مقدار اصلی دور نیست. حال زوایای دیگری را امتحان می کنیم. مثلاً به ازای $\theta = 31^\circ$ خواهیم دید:

$$\sin^2(31^\circ) \tan(31^\circ) = 0.16$$

بدین ترتیب انتظار داریم مقدار θ بین 31° و 32° درجه باشد. با بررسی بیشتر مقدار 31.7° را برای θ به دست می آوریم. در متون پیشرفته تر روش های عددی حل معادلات را خواهید آموخت.

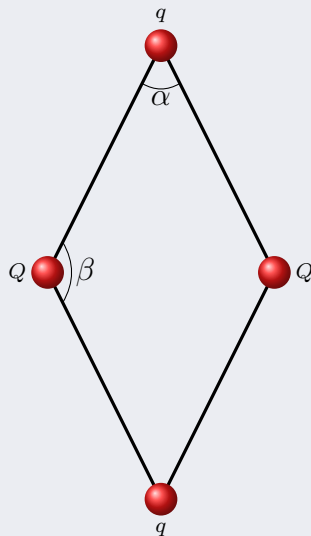
مسئله ۵:

در پایین سطح شیب داری با زاویه ی شیب $\alpha = \pi/6$ ، گلوله ی بارداری قرار دارد (ثابت شده است). گلوله ی دیگری مشابه با گلوله ی نخست، روی سطح شیب دار در تعادل قرار دارد. اگر زاویه ی شیب را دو برابر کنیم، فاصله ی گلوله ی دوم را روی سطح شیب دار نسبت به گلوله ی پایین، چقدر تغییر دهیم تا تعادل دوباره برقرار شود؟

$$\frac{l_2}{l_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/4} \quad \text{پاسخ ۵:}$$

مسئله ۶:

مطابق شکل بارهای q, Q, q, Q توسط چهار نخ یکسان به طول l به هم وصل شده‌اند. زاویه‌ی بینِ نخ‌ها را پیدا کنید.



پاسخ ۶: $\alpha = 2 \tan^{-1} \left(\frac{q}{Q} \right)^{2/3}, \quad \beta = \pi - \alpha$