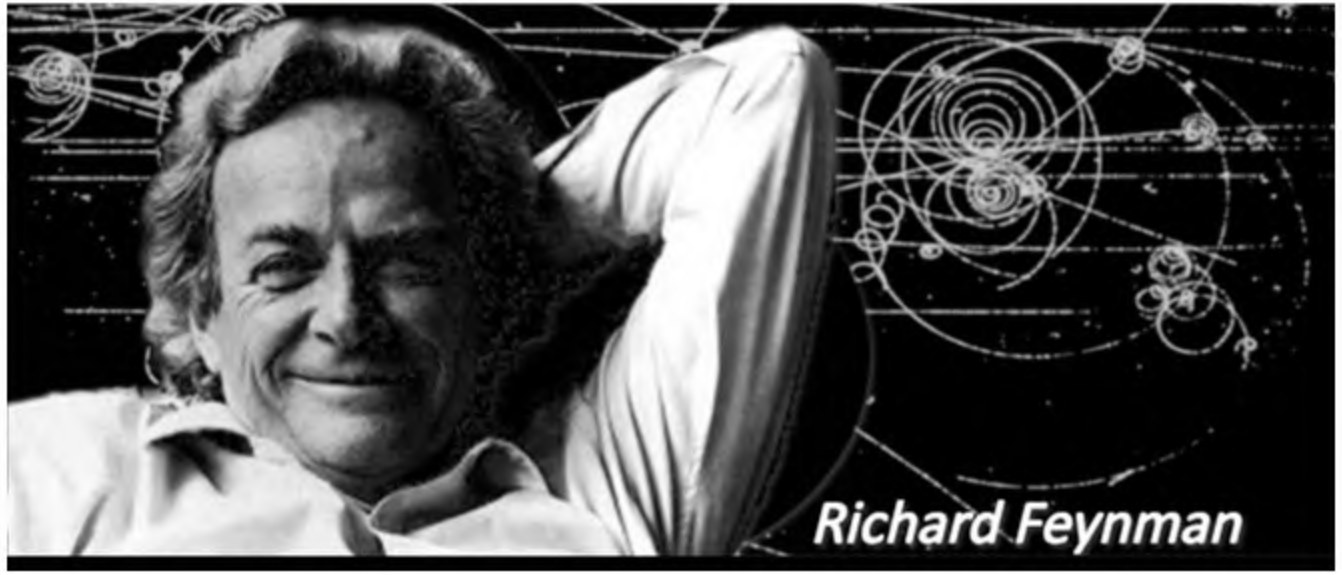
Fundamentals of Physics II

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس دوازدهم

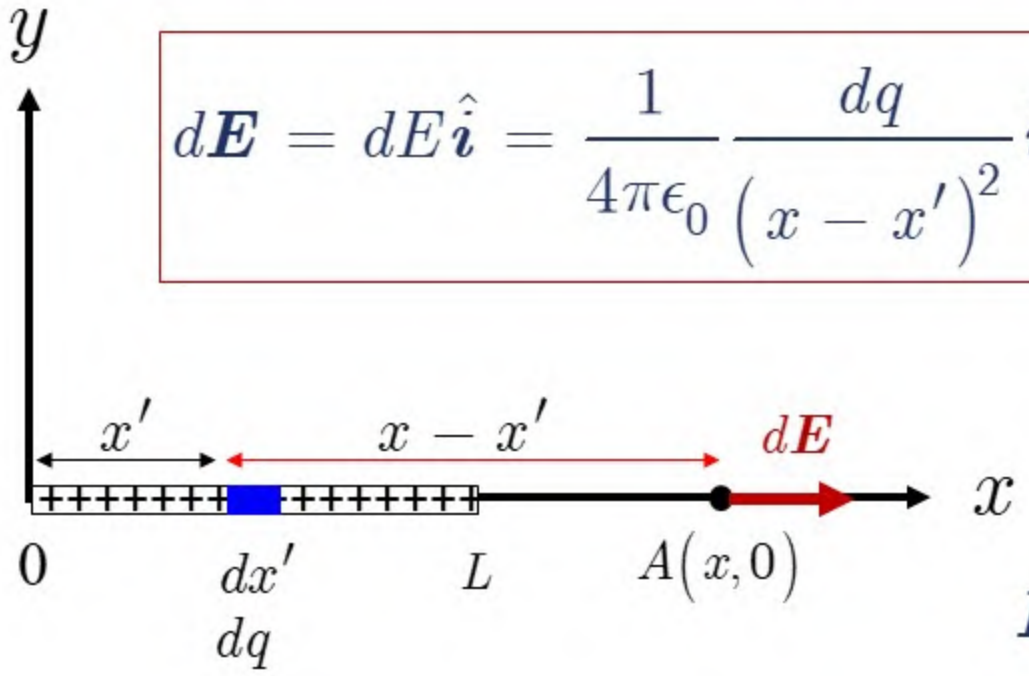
میدان الکتریکی- حل چند مسئله

Electric Field-Solved Problems

دانشگاه خوارزمی

مسئله‌ی ۱

بار الکتریکی Q به طور یکنواخت بر میله‌ای به طول L توزیع شده است. میدان الکتریکی را در امتداد میله (نقطه‌ی A) پیدا کنید.



$$d\boldsymbol{E} = dE\hat{\boldsymbol{i}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\left(x-x'\right)^2}\hat{\boldsymbol{i}}$$

$$dq = \lambda dx' = \frac{Q}{L}dx'$$

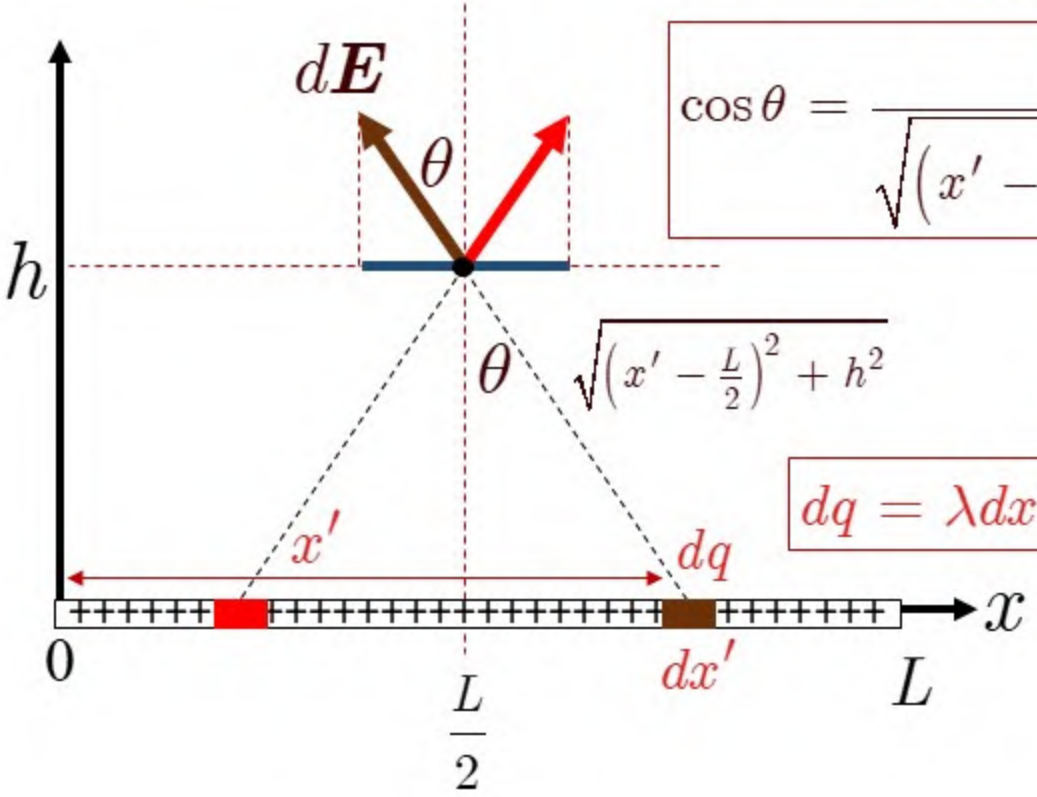
$$\boldsymbol{E} = \int d\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{i}}\int dE$$

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{i}}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{\lambda dx'}{\left(x-x'\right)^2} = \hat{\boldsymbol{i}}\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x-x'}\right)\Bigg|_{x'=0}^{x'=L}$$

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{i}}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right)$$

دانشگاه خوارزمی

میدان الکتریکی ناشی از یک میله‌ی باردار یکنواخت متناهی در نقطه‌ای روی عمود منصف میله



$$\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{\left(x'-\frac{L}{2}\right)^2+h^2}}$$

$$dq = \lambda dx'$$

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

$$\left|d\boldsymbol{E}\right| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\left(x'-\frac{L}{2}\right)^2+h^2}$$

$$E_x = \int dE_x = 0$$

$$E = E_y = \int dE_y = \int dE\cos\theta$$

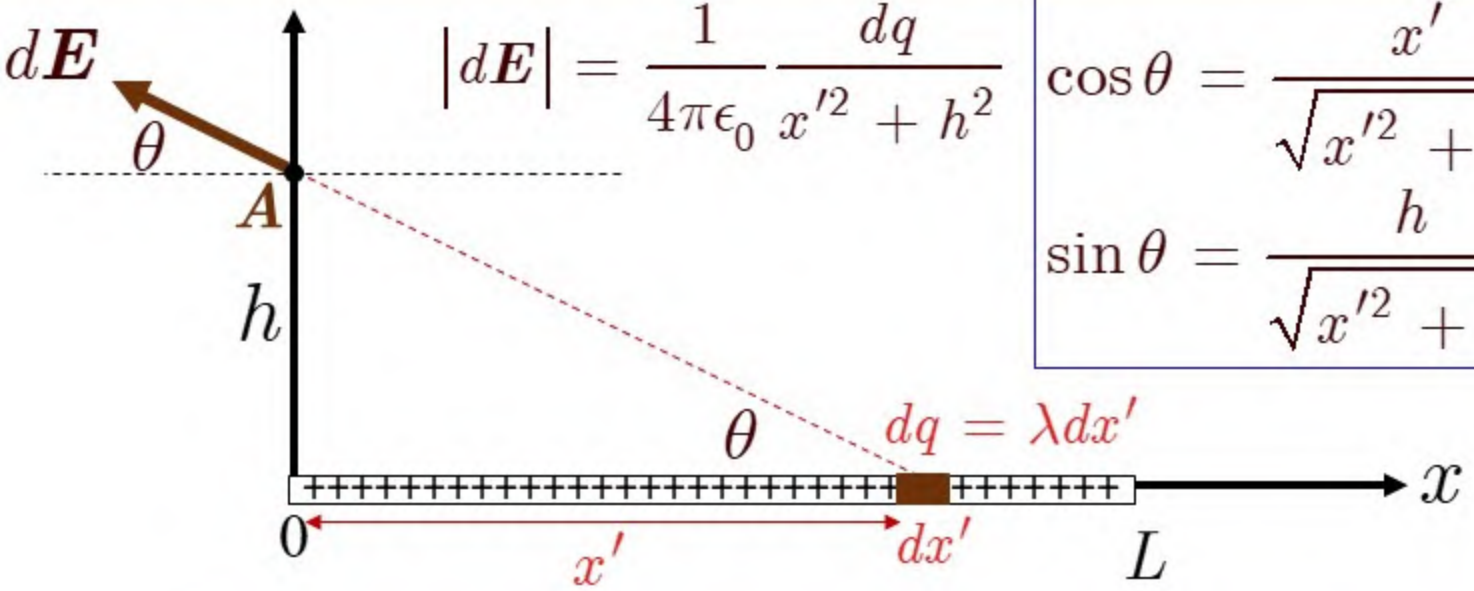
$$E = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx'}{\left[\left(x'-\frac{L}{2}\right)^2+h^2\right]}\frac{h}{\sqrt{\left(x'-\frac{L}{2}\right)^2+h^2}}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}h\int_0^L \frac{dx'}{\left[\left(x'-\frac{L}{2}\right)^2+h^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h\sqrt{4h^2+L^2}}\hat{\boldsymbol{j}}$$

دانشگاه خوارزمی

بار الکتریکی Q به طور یکنواخت بر میله‌ای به طول L توزیع شده است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی (A) پیدا کنید.



$$|d\boldsymbol{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{x'^2 + h^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + h^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{h}{\sqrt{x'^2 + h^2}}$$

$$E_x = \int dE_x = \int -dE\cos\theta = -\int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)}\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + h^2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{x'dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE\sin\theta = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)}\frac{h}{\sqrt{x'^2 + h^2}} = \frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{x'dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_x = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + L^2}}\right]$$

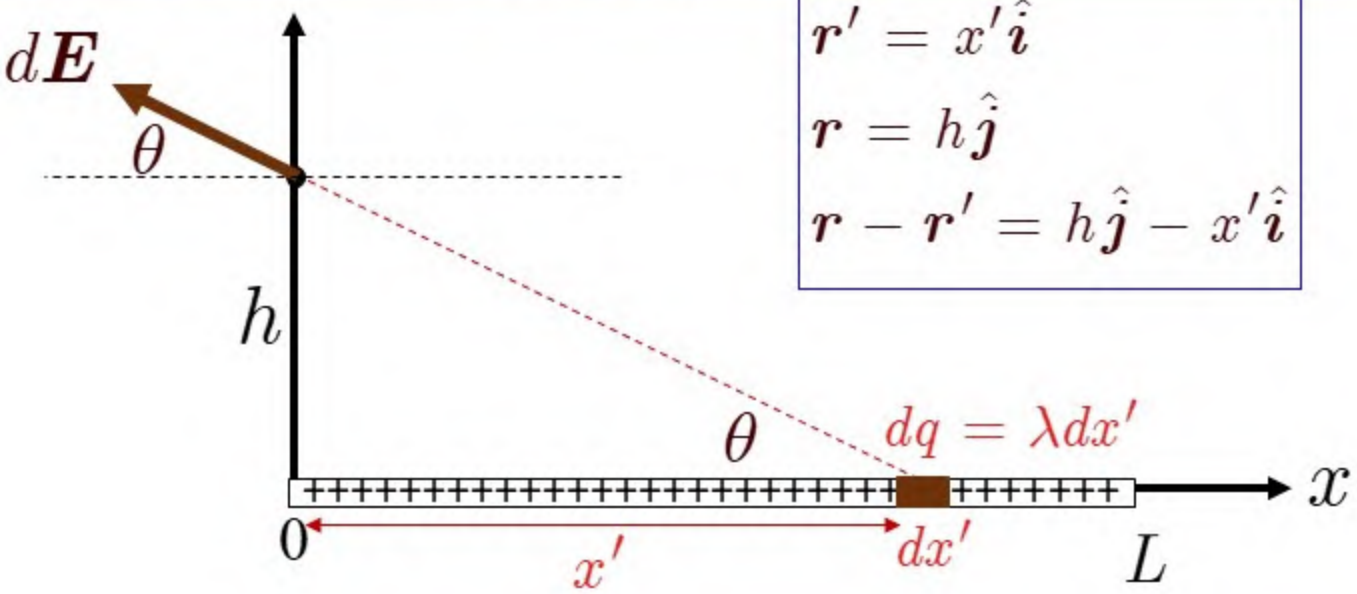
$$E_y = \frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h\sqrt{h^2 + L^2}}$$

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

دانشگاه خوارزمی

حل مسئله‌ی ۳ با نمادگذاری برداری



$$\boldsymbol{r}' = x'\hat{\boldsymbol{i}}$$
$$\boldsymbol{r} = h\hat{\boldsymbol{j}}$$
$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = h\hat{\boldsymbol{j}} - x'\hat{\boldsymbol{i}}$$

$$d\boldsymbol{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} = \frac{\lambda dx'}{4\pi\epsilon_0}\frac{h\hat{\boldsymbol{j}} - x'\hat{\boldsymbol{i}}}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boldsymbol{E} = \int d\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{h\hat{\boldsymbol{j}} - x'\hat{\boldsymbol{i}}}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx'$$

$$\boldsymbol{E} = \int d\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{j}}\frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \hat{\boldsymbol{i}}\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{x'dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{x'dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{x'dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_x = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + L^2}}\right]$$

$$E_y = \frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h\sqrt{h^2 + L^2}}$$

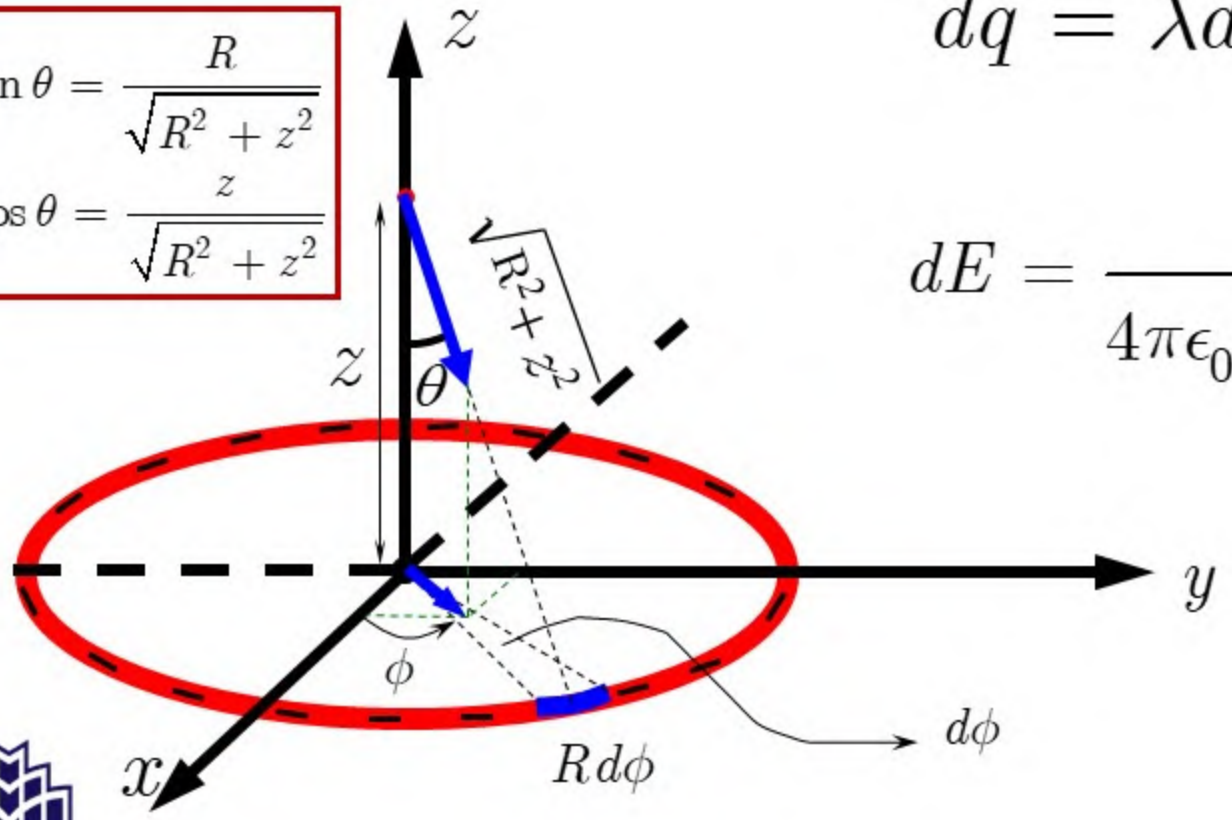
$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

دانشگاه خوارزمی

بار الکتریکی Q به طور یکنواخت بر حلقه ی دایره ای به شعاع R توزیع شده است. میدان الکتریکی را بر روی محور حلقه در فاصله‌ی z پیدا کنید. (بار حلقه را منفی در نظر گرفته‌ایم)

$$\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$



$$dq = \lambda dl$$

$$dq = \frac{Q}{2\pi R} R d\phi$$

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\left(R^2+z^2\right)}$$

$$dE_x = dE\sin\theta\cos\phi$$
$$dE_y = dE\sin\theta\sin\phi$$
$$dE_z = dE\cos\theta$$

دانشگاه خوارزمی

ادامه‌ی مسئله‌ی ۴

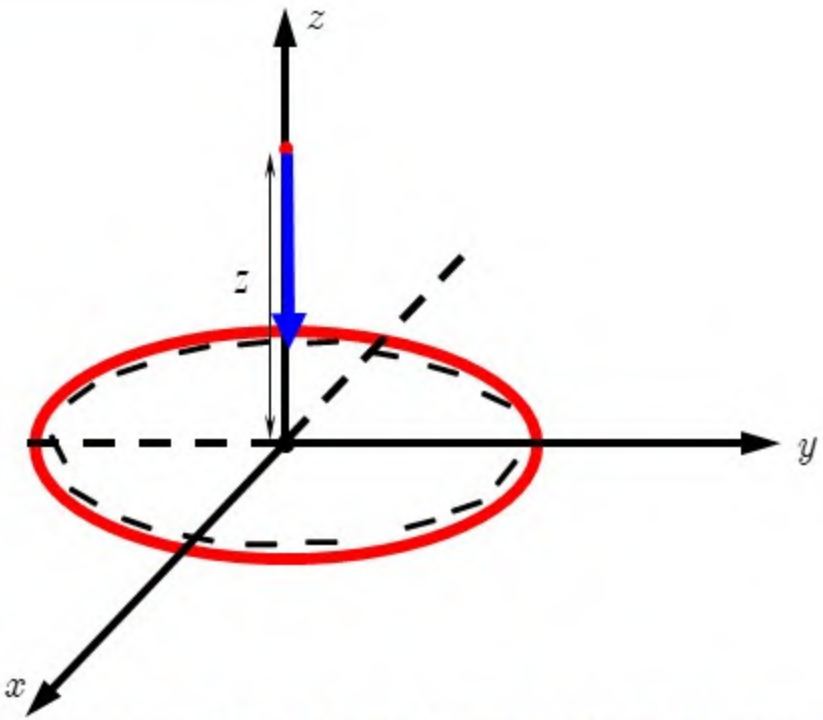
$$E_x = \int dE_x = \int dE \sin\theta \cos\phi$$
$$E_y = \int dE_y = \int dE \sin\theta \sin\phi$$
$$E_z = \int dE_z = \int dE \cos\theta$$

$$E = E_z = \frac{\lambda 2\pi R z}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_x = \frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = 0$$

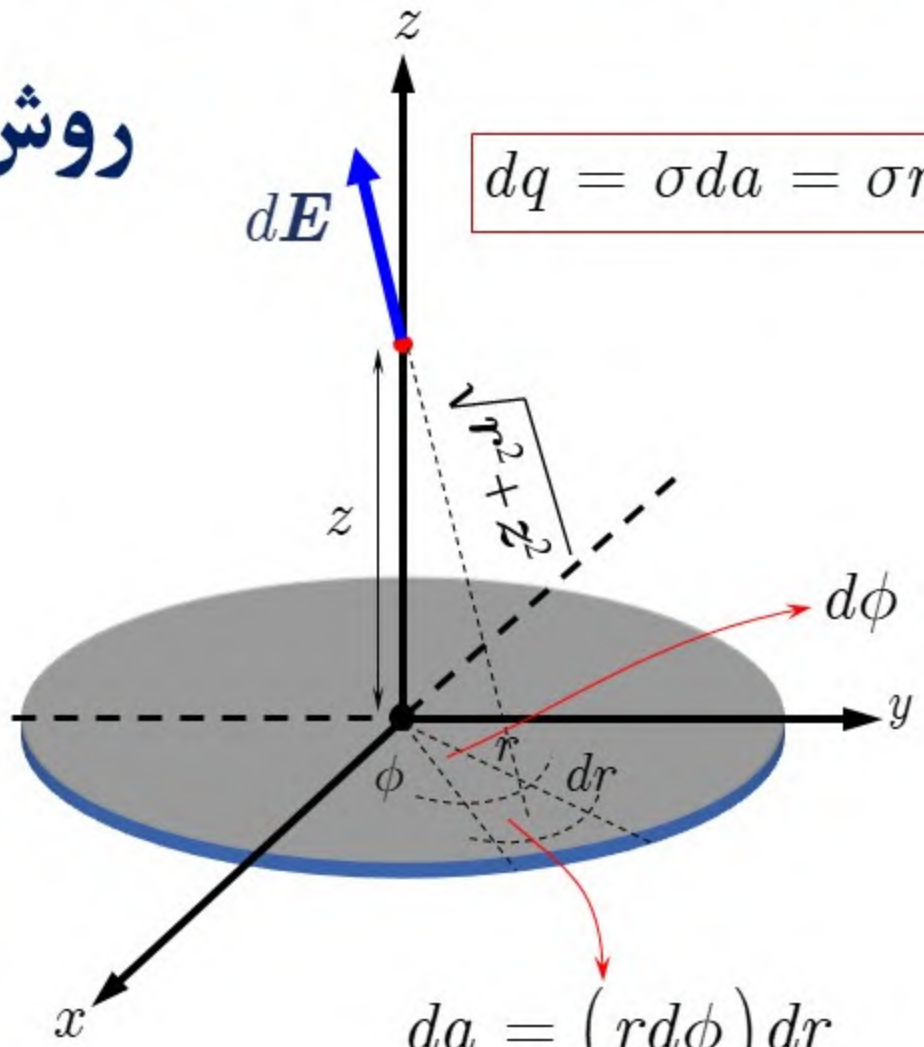
$$E_y = \frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi = 0$$

$$E_z = \frac{\lambda R z}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi$$



بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی σ بر روی قرص دایره ای به شعاع R توزیع شده است. میدان الکتریکی را با توجه به شکل زیر در نقطه‌ی $(0,z)$ پیدا کنید.

روش اول



$$dq = \sigma da = \sigma r dr d\phi$$

$$da = \left(r d\phi\right) dr$$

$$dE = \frac{\sigma da}{4\pi\epsilon_0\left(r^2 + z^2\right)}$$

$$dE_z = dE\cos\theta = dE\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$dE_x = dE\sin\theta\cos\phi = dE\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\cos\phi$$

$$dE_y = dE\sin\theta\sin\phi = dE\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\sin\phi$$

$$dE_z = dE\cos\theta = dE\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$dE_x = dE\sin\theta\cos\phi = dE\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\cos\phi = \frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\cos\phi}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$dE_y = dE\sin\theta\sin\phi = dE\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\sin\phi = \frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\sin\phi}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

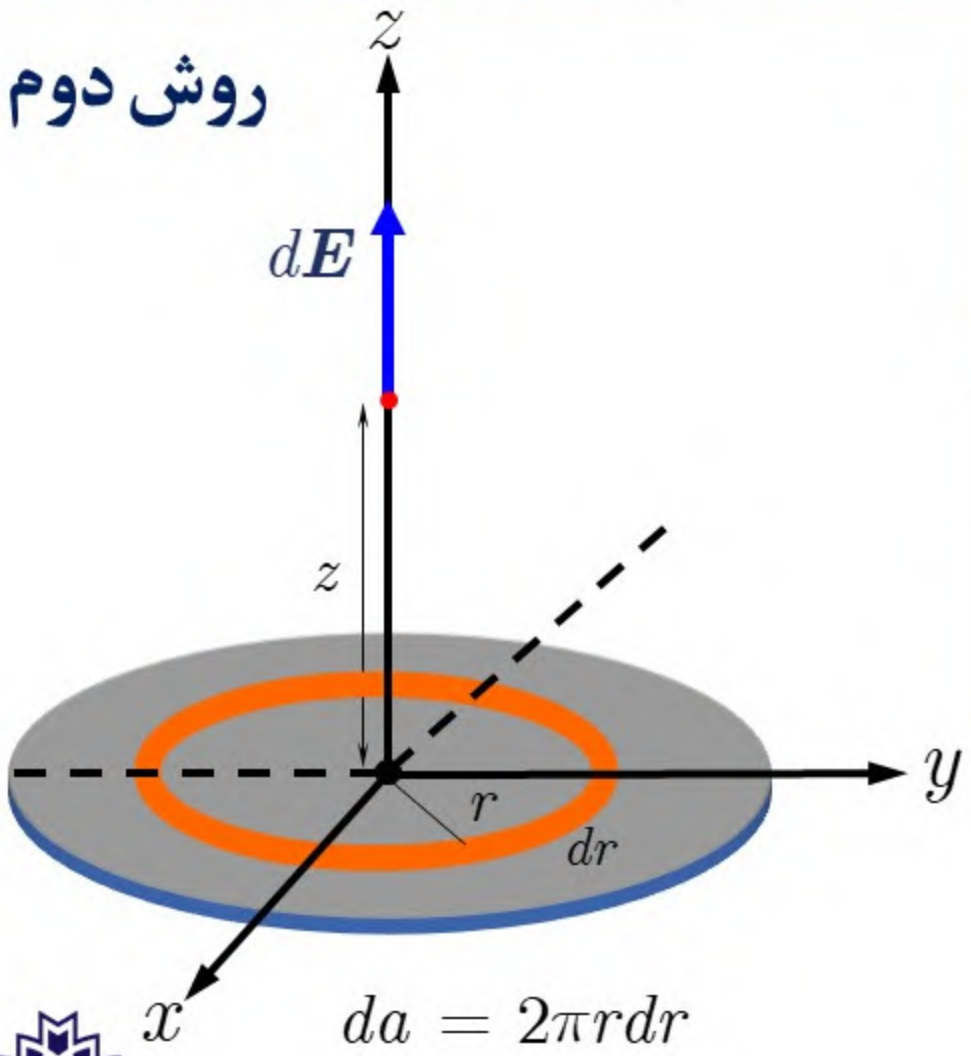
$$E_z = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$E_x = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\cos\phi}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = 0$$

$$E_y = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\sin\phi}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = 0$$

دانشگاه خوارزمی

روش دوم



$$da = 2\pi r dr$$

$$dq = \sigma da = \sigma 2\pi r dr$$

$$\boxed{dE = \frac{dqz}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + z^2\right)^{3/2}}}$$

میدان ناشی از حلقه‌ی باردار بر روی محور آن

$$\boxed{E = \frac{z\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^{r=R} \frac{rdr}{\left(r^2 + z^2\right)^{3/2}}}$$

$$\boxed{r^2 + z^2 = u^2 \Rightarrow rdr = udu}$$

دانشگاه خوارزمی

$$E = \frac{z\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{udu}{u^3} = \frac{z\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{u}\right] = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_{r=0}^{r=R}$$

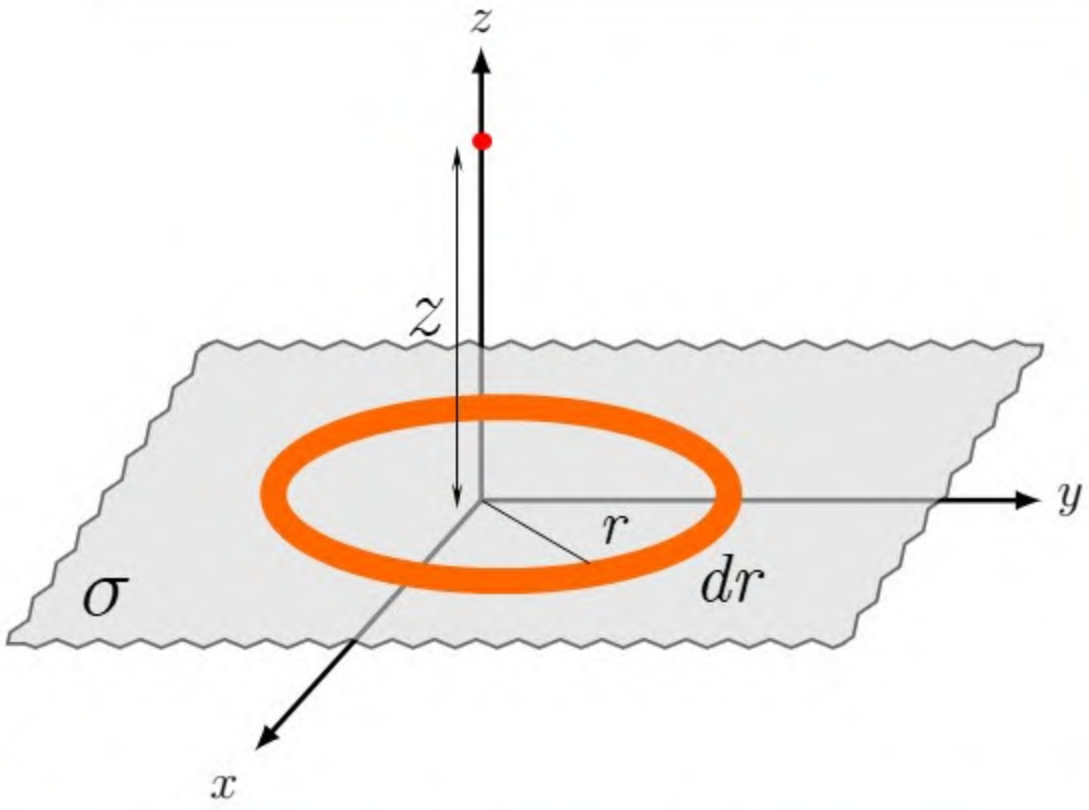
$$E = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]$$

$$\boxed{|z| = \begin{cases} z & z > 0 \\ -z & z < 0 \end{cases}}$$

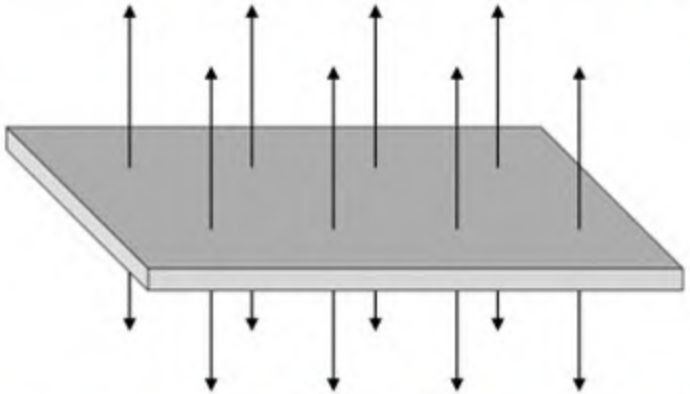
$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \hat{k}\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] & z > 0 \\ -\hat{k}\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 + \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] & z < 0 \end{cases}}$$

میدان الکتریکی ناشی از یک ورقه‌ی نارسانای نازک با ابعاد بی نهایت و چگالی سطحی بار یکنواخت.

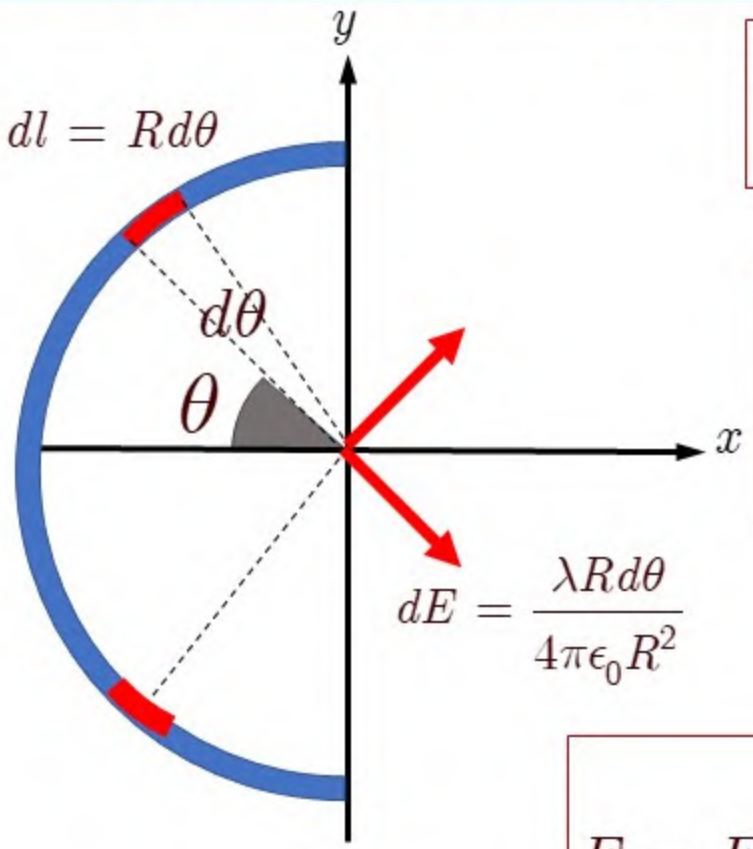
$$E = \frac{z\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\int_{r=0}^{r=\infty}\frac{rdr}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_{r=0}^{r=\infty} = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{z^2}}\right]$$



$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \hat{k}\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & z > 0 \\ -\hat{k}\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & z < 0 \end{cases}$$



مسئله‌ی ۷



بار الکتریکی $+Q$ به طور یکنواخت بر یک میله‌ی شیشه‌ای به شکل نیم‌دایره به شعاع R توزیع شده است. میدان الکتریکی در مرکز نیم دایره چقدر است؟

عنصر $dl=Rd\theta$ را با بار الکتریکی $dq=\lambda Rd\theta$ بر روی میله در نظر می‌گیریم. میدان الکتریکی ناشی از این عنصر در مرکز نیم‌دایره برابر است با

$$dE = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

با توجه به تقارن مسئله، واضح است که:

$$E_y = \int dE_y = 0$$

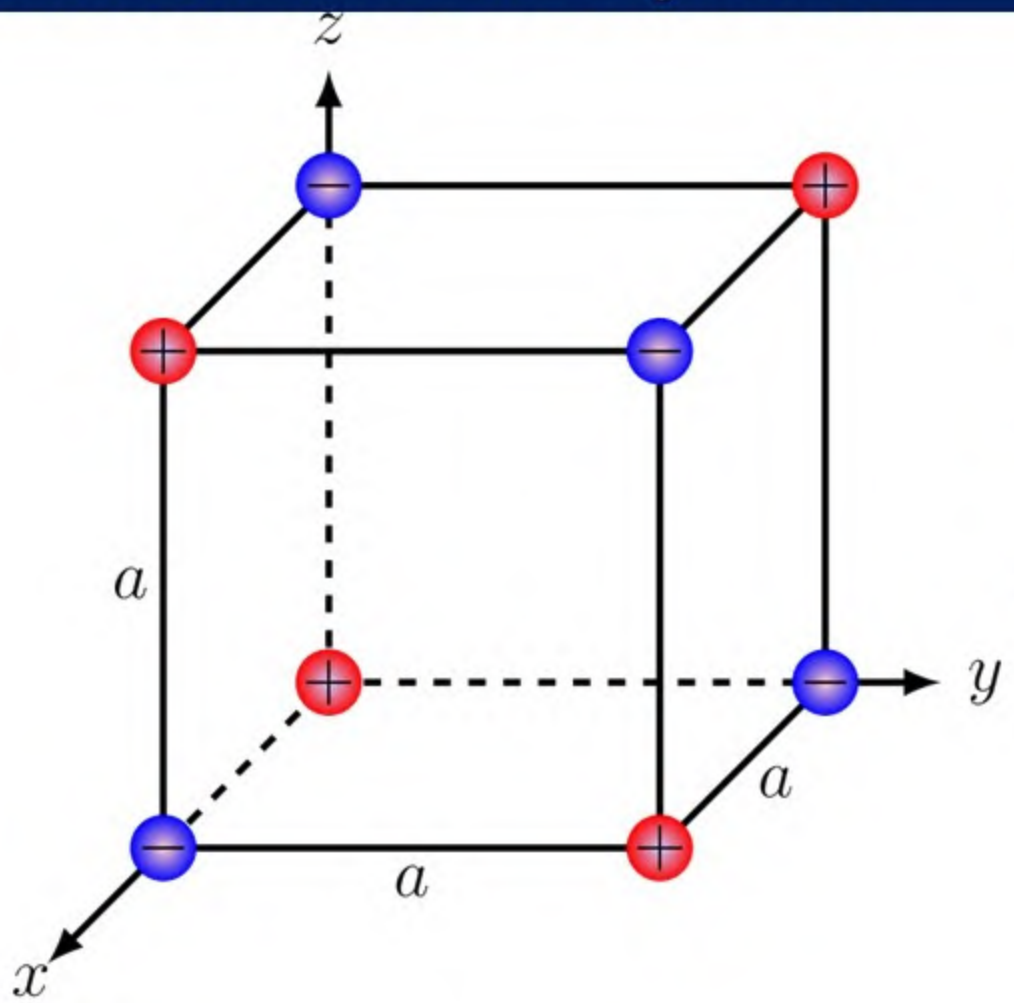
$$E = E_x = \int dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

اما چون توزیع بار یکنواخت است: $\lambda = \frac{Q}{\pi R}$ بنابر این:

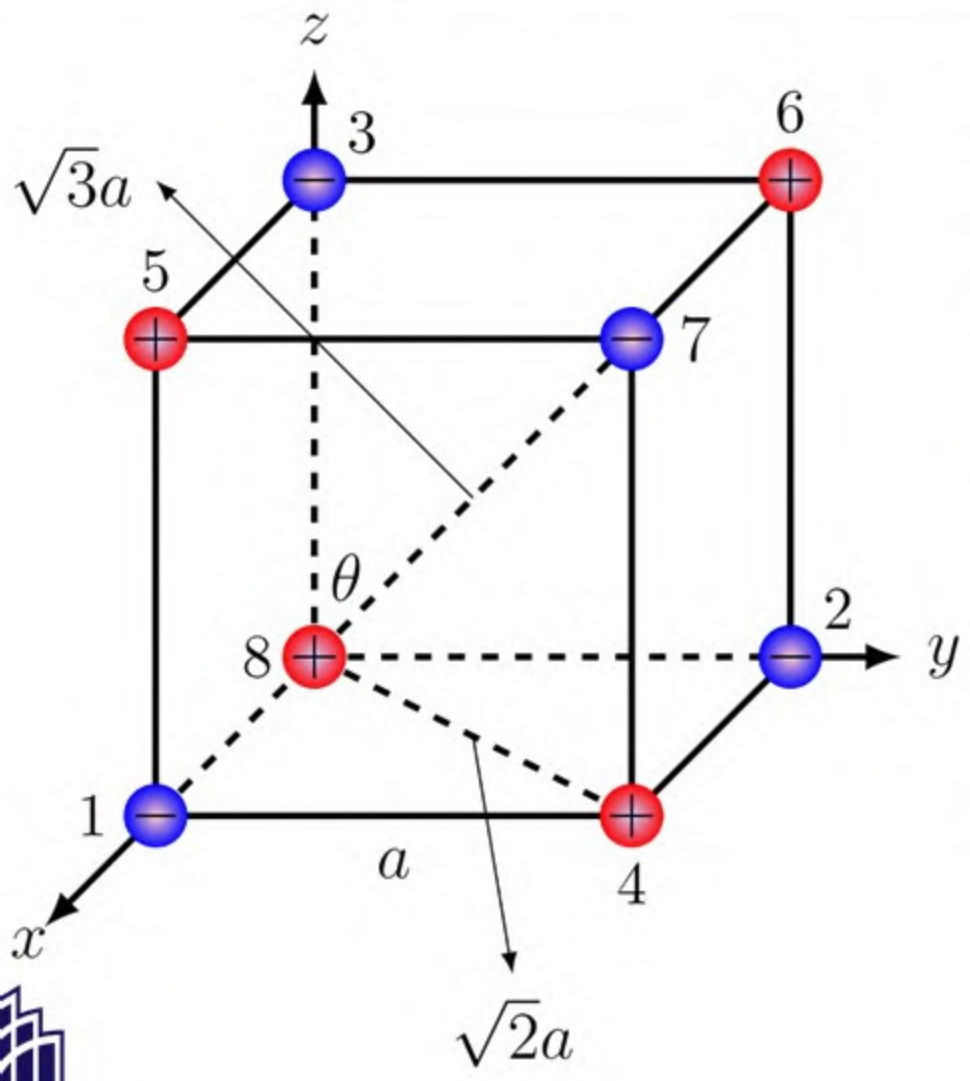
$$E = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}$$

دانشگاه خوارزمی

مسئله‌ی۸

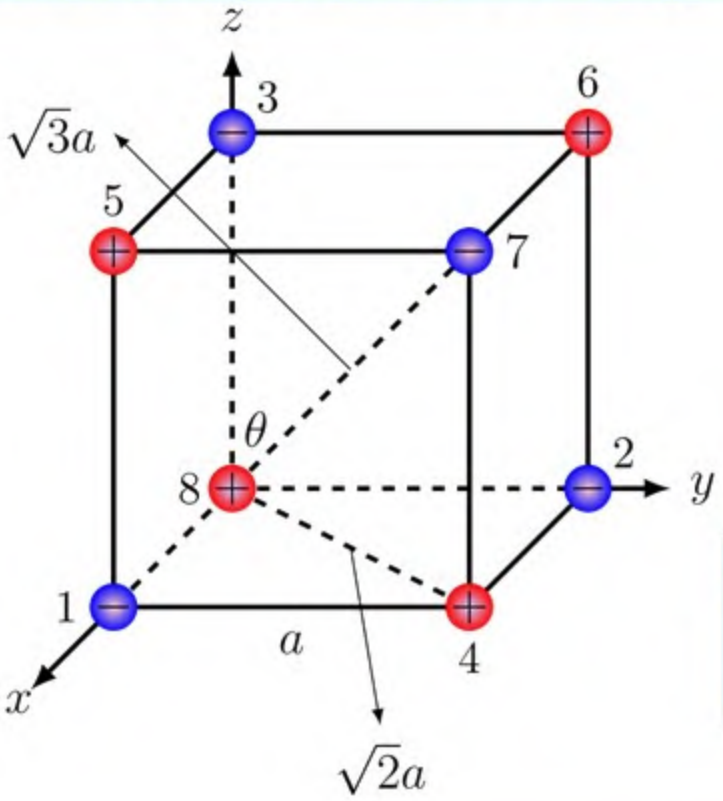


بارهای نقطه‌ای $+q$ و $-q$ مطابق شکل را مطابق شکل زیر در رئوس مکعبی به ضلع $a=2.8\times10^{-10}$ m به طور یک در میان قرار گرفته‌اند. اندازه‌ی نیروی الکتریکی وارد بر هر یک از بارها را (از طرف هفت بارِ دیگر) حساب کنید.



حل: بارها را مطابق شکل زیر نام‌گذاری کرده‌ایم.

واضح است که اندازه‌ی نیروی وارد بر بارها یکسان است. فرض کنید می‌خواهیم نیروی وارد بر بار شماره ۸ را حساب کنیم. دستگاه مختصات را به گونه‌ای انتخاب کرده‌ایم که بار شماره ۸ در مبدأ مختصات است.



فاصله‌ی بارهای ۱,۲,۳ از مبدأ مختصات (از بار شماره ۸)، برابر با a است. و نیروهایی که این بارها به بار هشتم وارد می‌کنند در جهت محورهای مختصات است:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{i}; \quad \mathbf{F}_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{j}; \quad \mathbf{F}_3 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{k}$$

فاصله‌ی بارهای ۴,۵,۶ از مبدأ مختصات (از بار شماره ۸)، برابر با $\sqrt{2}a$ است. و جهت نیرو در امتداد قطر هر وجه مکعب است. یعنی با محورهای مختصات (در صفحه‌ی خود) زاویه‌ی $45°$ می‌سازد.

$$\boldsymbol{F}_4 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{2}a\right)^2}\left(-\cos 45°\,\hat{i} - \sin 45°\,\hat{j}\right) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right)$$

$$\boldsymbol{F}_5 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{2}a\right)^2}\left(-\cos 45°\,\hat{i} - \sin 45°\,\hat{k}\right) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k}\right)$$

دانشگاه خوارزمی

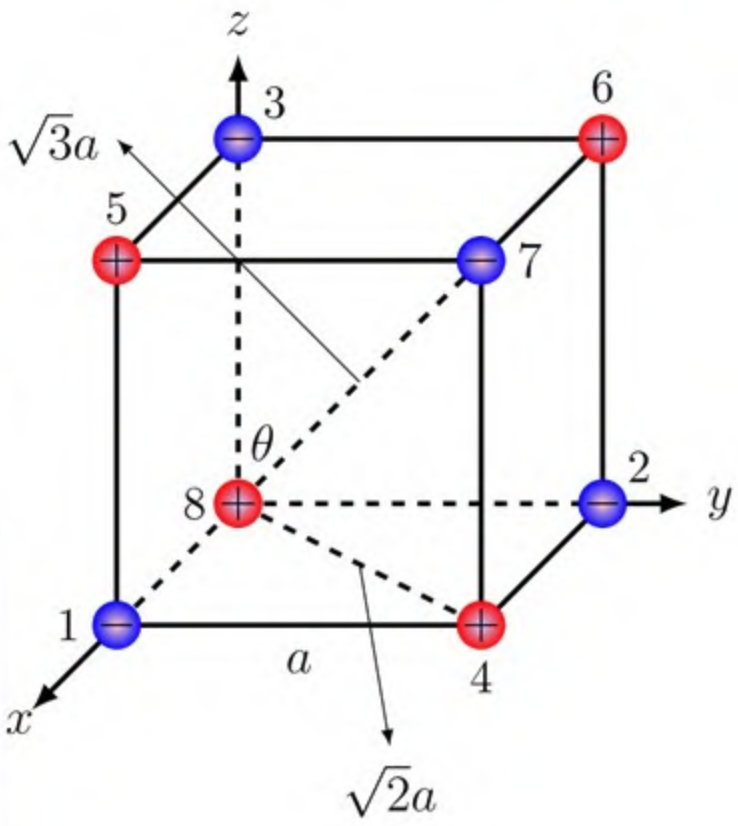
$$\boldsymbol{F}_6 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{2}a\right)^2}\left(-\cos 45^\circ\,\hat{j} - \sin 45^\circ\,\hat{k}\right) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{k}\right)$$

فاصله‌ی بار شماره ۷ از مبدأ مختصات (از بار شماره ۸)، برابر با $\sqrt{3}a$ است. و

زاویه‌ای که بردار مکان آن با محور z می‌سازد برابر است با

$$\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{1}{3}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_7 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{3}a\right)^2}\left(\sin\theta\cos 45^\circ\,\hat{i} + \sin\theta\sin 45^\circ\,\hat{j} + \cos\theta\hat{k}\right)\\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{3}a\right)^2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{i} + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{j} + \sqrt{\frac{1}{3}}\hat{k}\right)\\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\,\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{9}\,\hat{j} + \frac{\sqrt{3}}{9}\,\hat{k}\right)\end{aligned}$$



$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_7 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\hat{i} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\hat{j} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\hat{k}\right]$$

$$= \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2 (9 \times 10^9)}{(3.8 \times 10^{-10})^2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$$

$$= 7.74 \times 10^{-10}\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$$

$$\boxed{\left|\boldsymbol{F}\right| = 1.34 \times 10^{-9}\,\mathrm{N}}$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید