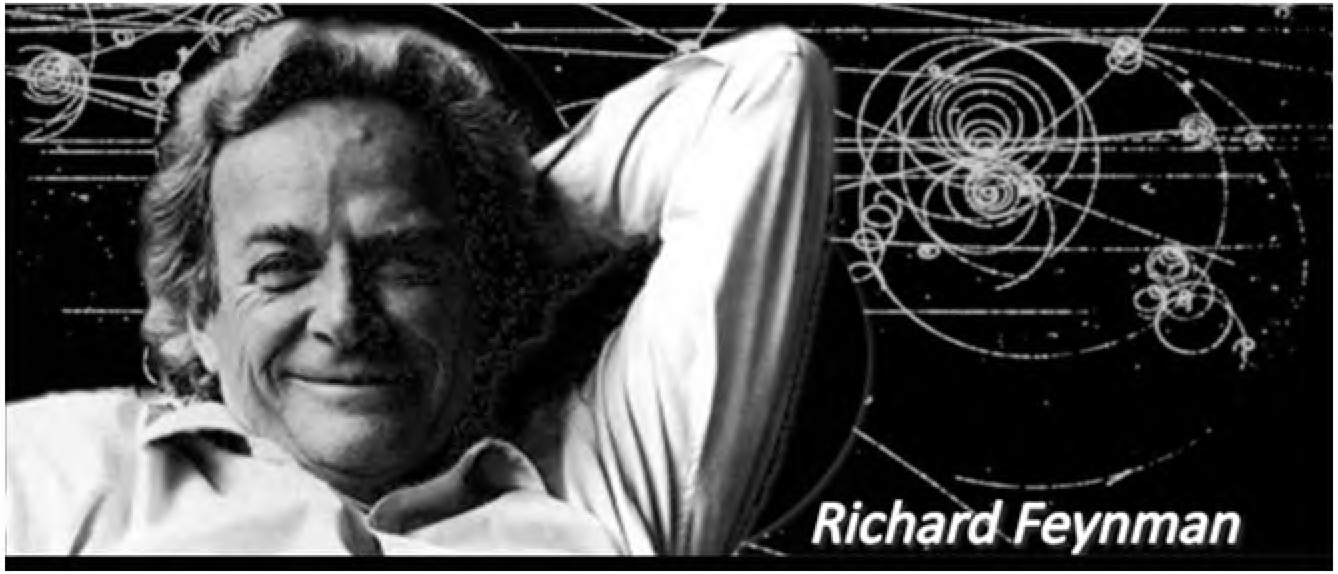
Fundamentals of Physics II

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

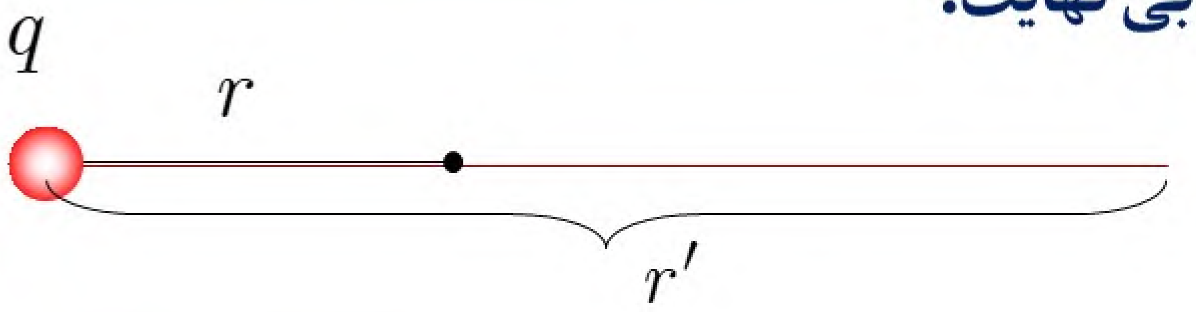
درس هفدهم

پتانسیل الکتریکی- بخش۲

Electric Potential-part2

دانشگاه خوارزمی

پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای نسبت به بی نهایت:

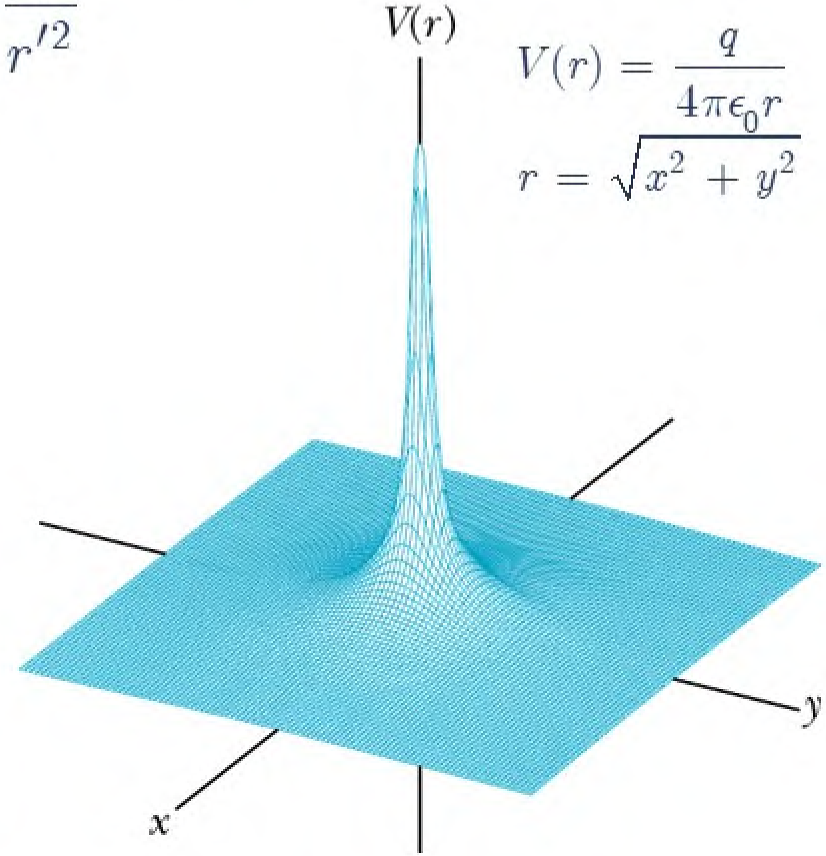


$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'^2}$$

$$\boxed{V = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}} \qquad \boxed{d\mathbf{l} = dr'\hat{\mathbf{e}}_r}$$

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{q}{r'^2}dr' \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-1}{r} - \frac{-1}{\infty}\right) \end{aligned}$$

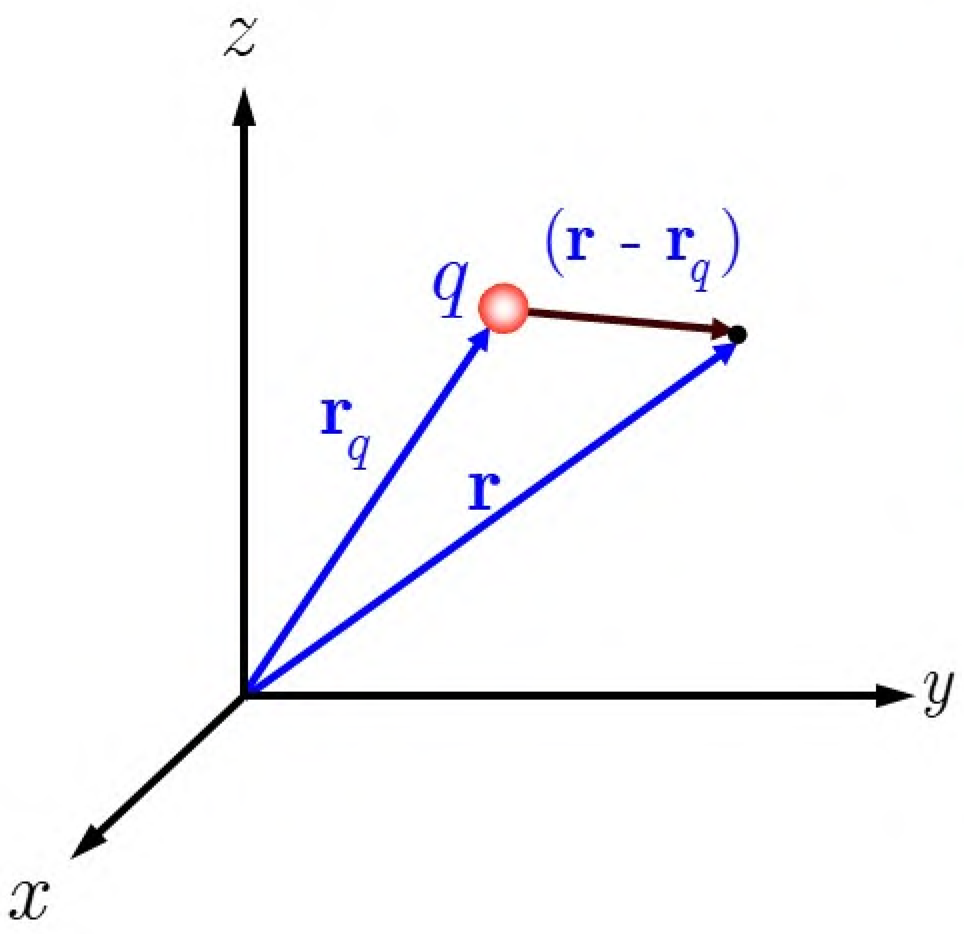
$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}}$$



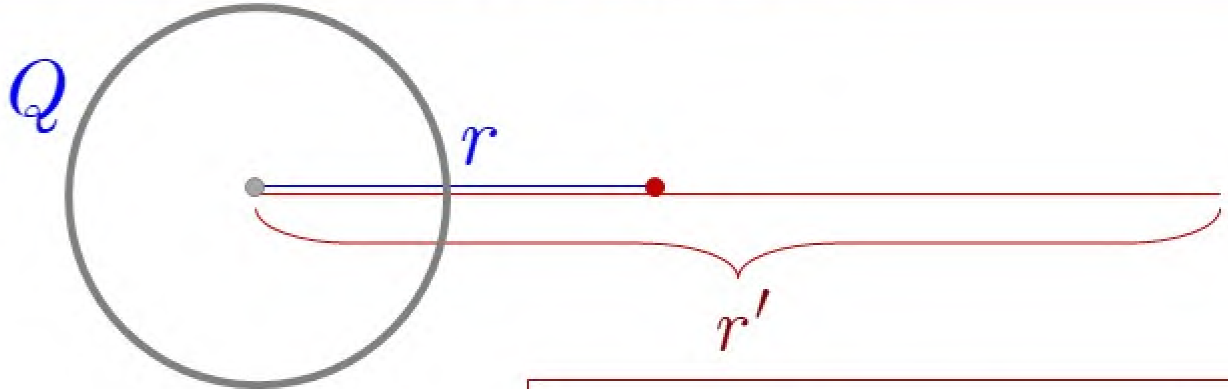
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

دانشگاه خوارزمی

پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای نسبت به بی نهایت:



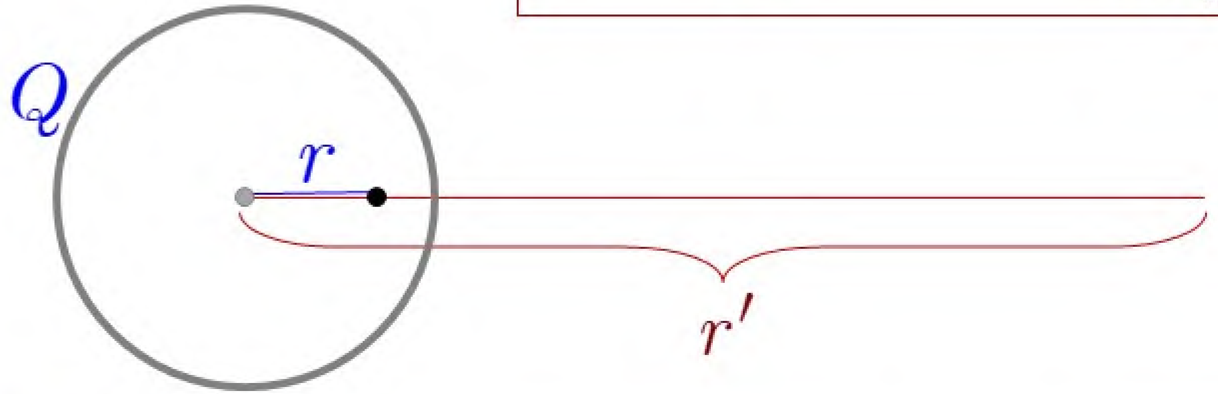
$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|}}$$



$$E = \begin{cases} 0 & r' < R \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r'^2} & r' > R \end{cases}$$

الف) $r > R$

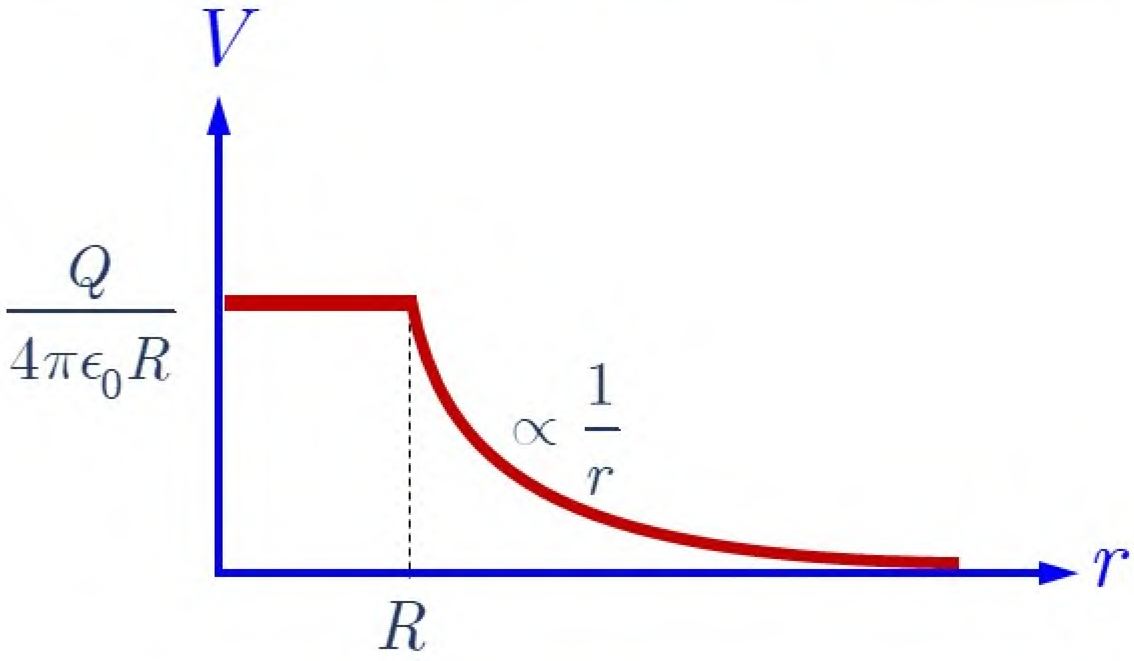
$$V = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{Q}{r'^2}dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



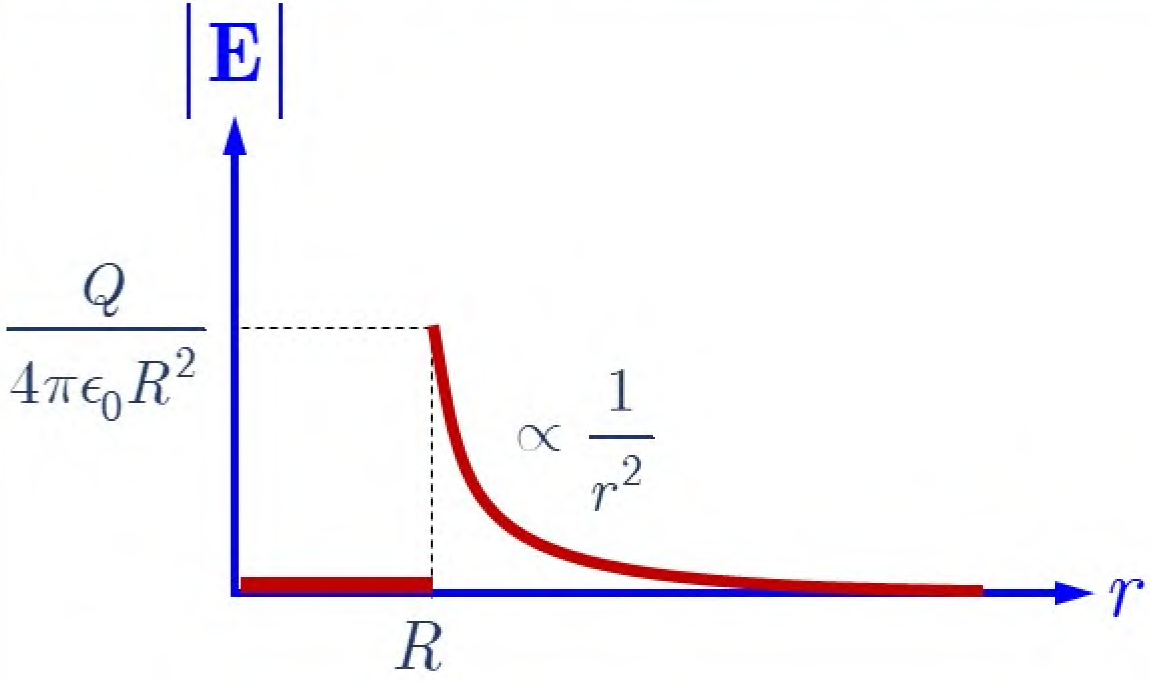
ب) $r < R$

$$V = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_{\infty}^{R}\frac{Q}{r'^2}dr' + \int_{R}^{r}(0)dr' + \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

مقایسه‌ی پتانسیل و میدان الکتریکی ناشی از پوسته‌ی کروی با بار سطحی یکنواخت

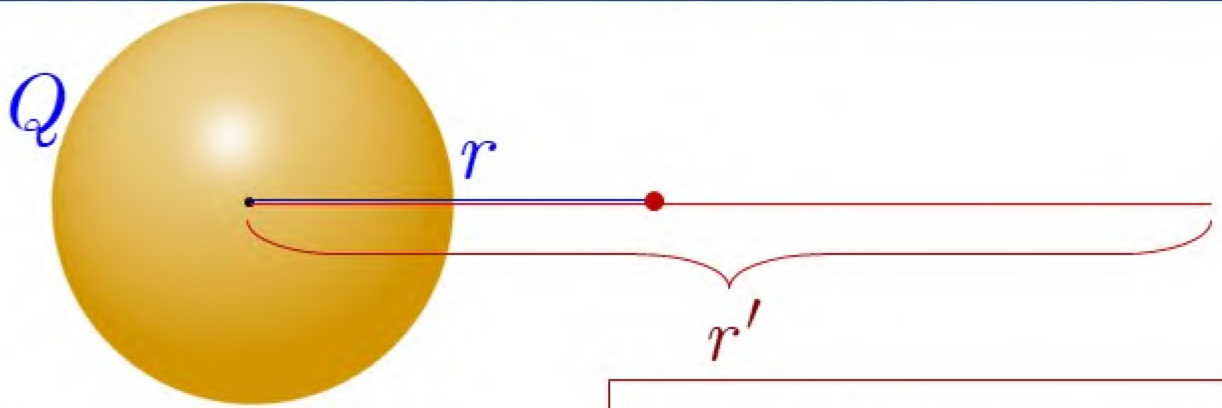


$$V = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{R} & r \leq R \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r} & r \geq R \end{cases}$$



$$E = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & r > R \end{cases}$$

پتانسیل الکتریکی ناشی از کره‌ی تو پُر با بار الکتریکی حجمی یکنواخت

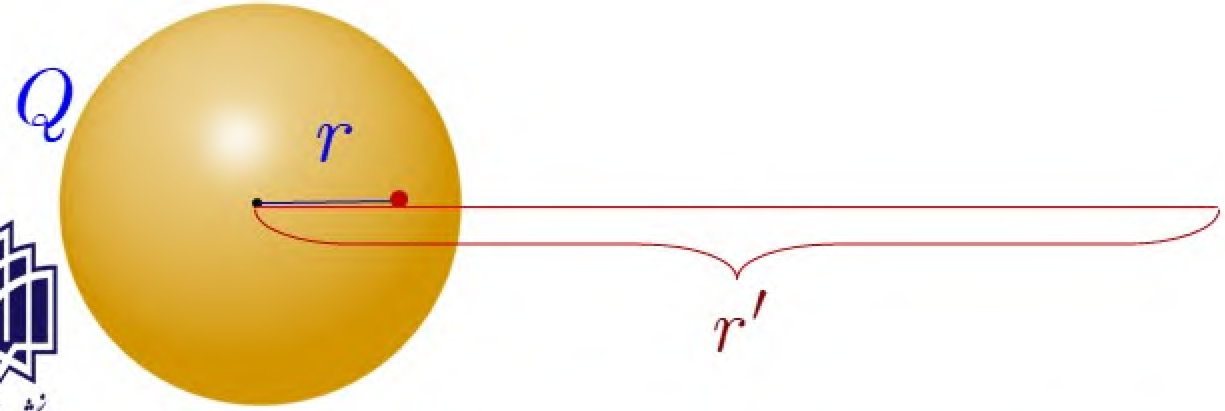


$$E = \begin{cases} \dfrac{\rho r'}{3\epsilon_0} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Qr'}{R^3} & r' \leq R \\ \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r'^2} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r'^2} & r' \geq R \end{cases}$$

(الف) $r > R$

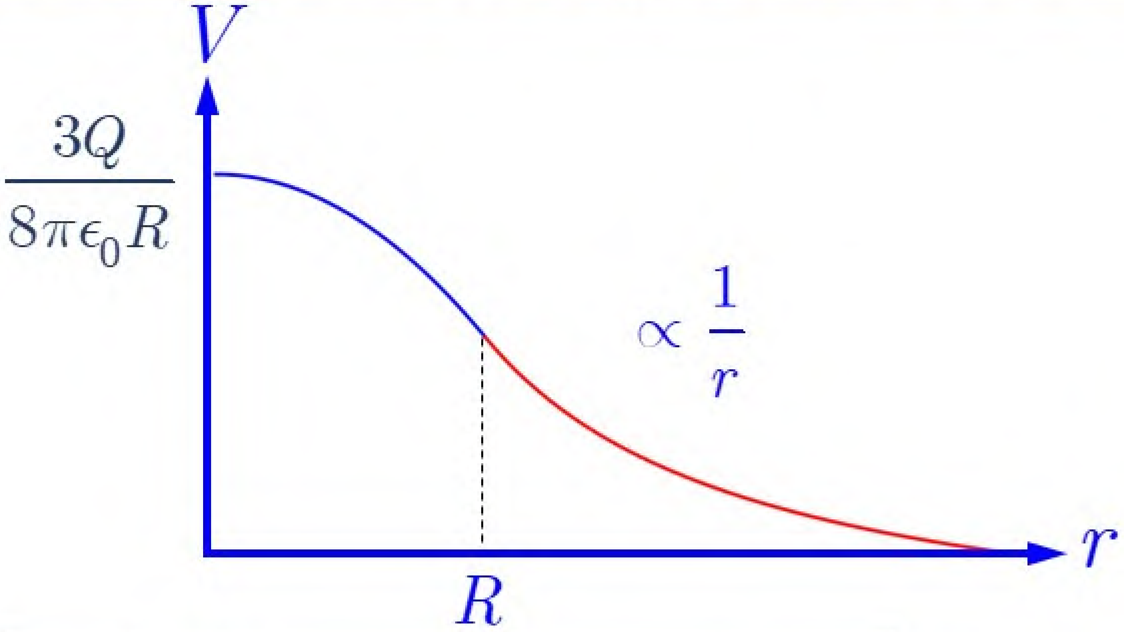
$$V = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{Q}{r'^2}dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$$

(ب) $r < R$



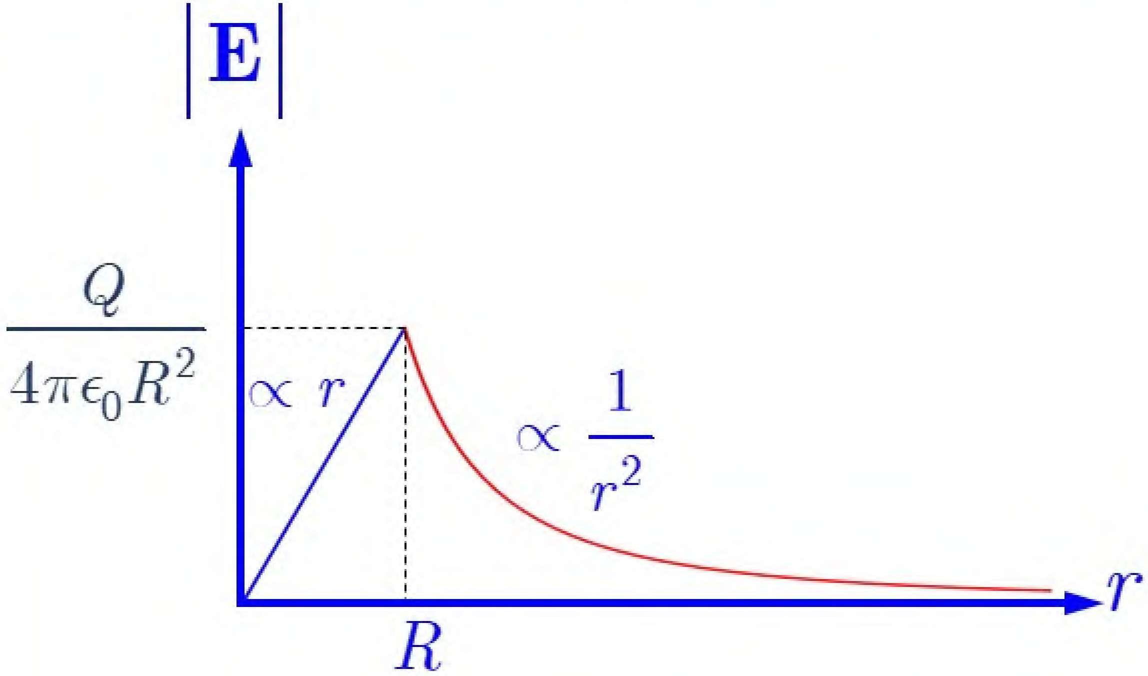
$$\begin{aligned} V &= -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_{\infty}^{R}\frac{1}{r'^2}dr' + \frac{1}{R^3}\int_{R}^{r} r'dr'\right] \\ &= \frac{Q}{8\pi R^3\epsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right) \\ &= \frac{\rho}{6\epsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right) \end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی



$$V = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi R^3 \epsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right) & r \le R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} & r \ge R \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right) & r \le R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} & r \ge R \end{cases}$$



$$E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3} & r \le R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} & r \ge R \end{cases}$$

Example 9 Electrostatic Potential of a Lead Nucleus

A nucleus of the lead isotope, lead 208, has a radius of 6.34×10^{-15} m and contains 82 protons, each with a charge of 1.60×10^{-19} C. Let us calculate the electrostatic potential at the surface of this nucleus, assuming that the charge is distributed uniformly throughout a sphere of radius 6.34×10^{-15} m.

We locate the origin of a coordinate system at the center of the nucleus. The total charge in the nucleus is $82(1.60 \times 10^{-19})$ C. Hence from Eq. 28.38 the electrostatic potential at the surface ($r = a$) is

$$V_{\text{surface}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$= 8.99 \times 10^9 \cdot \frac{82 \times 1.60 \times 10^{-19}}{6.34 \times 10^{-15}}$$

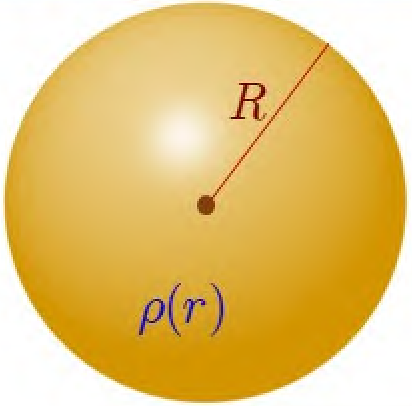
$$= 1.86 \times 10^7 \text{ V}$$

UNIVERSITY PHYSICS

George B. Arfken ▪ David F. Griffing
Donald C. Kelly ▪ Joseph Priest
Miami University, Oxford, Ohio

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}\right) \quad (0 \le r \le a) \qquad (28.38)$$

دانشگاه خوارزمی



$$\rho(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{R} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

بار الکتریکی با **چگالی غیر یکنواخت** درون کره‌ای به شعاع R توزیع شده است:

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 R} & r \leq R \\ \dfrac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2} & r \geq R \end{cases}$$

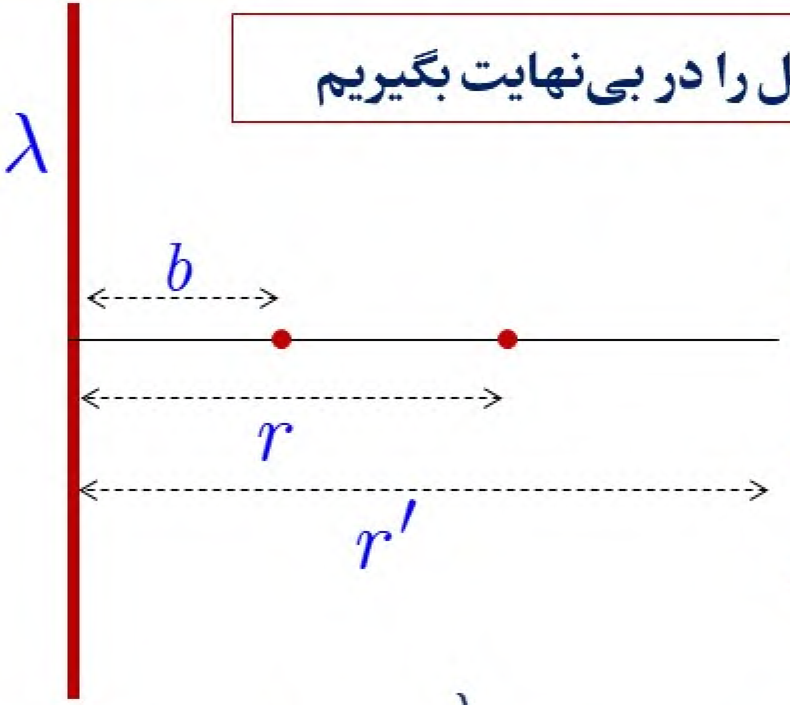
ابتدا با استفاده از قانون گوس میدان الکتریکی را درون و بیرون کره پیدا کنید. نشان دهید:

سپس با انتگرال گیری از میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی را نسبت به بی‌نهایت در نقاط درون و بیرون کره پیدا کنید.

نمودار اندازه‌ی میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی را بر حسب فاصله از مرکز کره رسم کنید.

پتانسیل الکتریکی ناشی از یک میله‌ی باردار نامتناهی با چگالی یکنواخت

لازم است توجه کنید که برای توزیع‌های نامتناهی بار الکتریکی نمی‌توانیم مبدأ پتانسیل را در بی‌نهایت بگیریم



این مسئله دارای تقارن استوانه‌ای است. خطوط میدان الکتریکی به شکل شعاعی و عمود بر میله هستند و سطوح هم‌پتانسیل، استوانه‌های هم محور با میله هستند. مبدأ پتانسیل را نقطه‌ای دلخواه به فاصله‌ی b از میله در نظر می‌گیریم. یعنی در واقع پتانسیل الکتریکی را بر سطح استوانه‌ای به شعاع b که با میله هم محور است، صفر اختیار می‌کنیم.

در درس‌های پیشین دیدیم که میدان الکتریکی ناشی از یک میله‌ی نامتناهی شعاعی است و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r'}$$

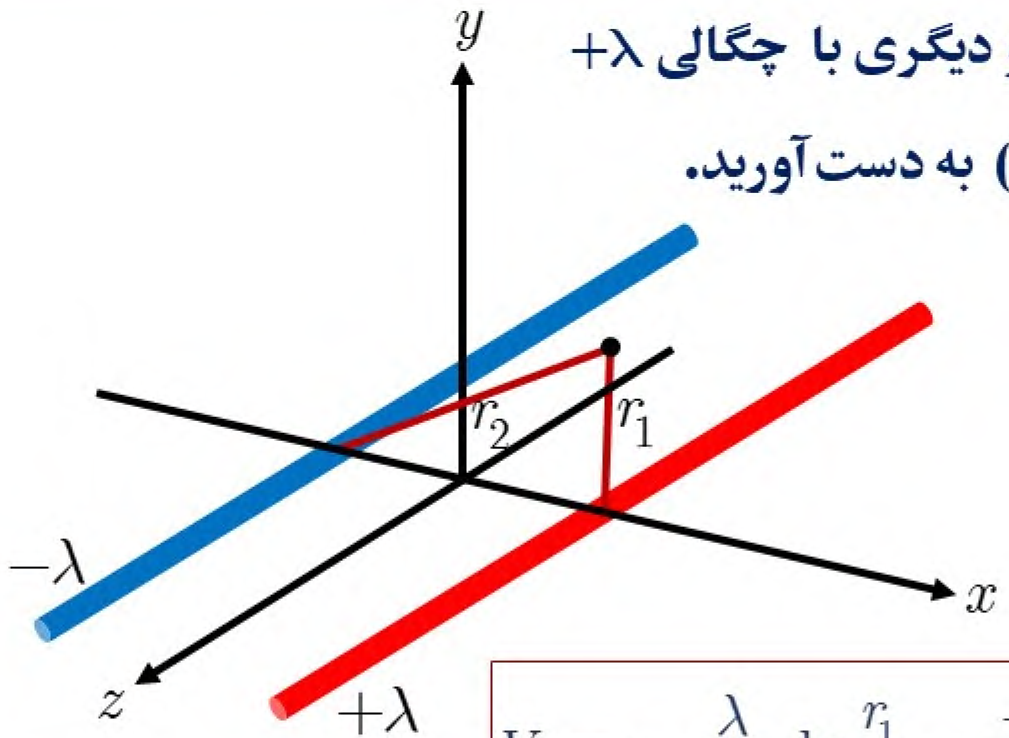
$$V(r) - V(b) = -\int_b^r \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

$$V(r) - 0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_b^r \frac{dr'}{r'}$$

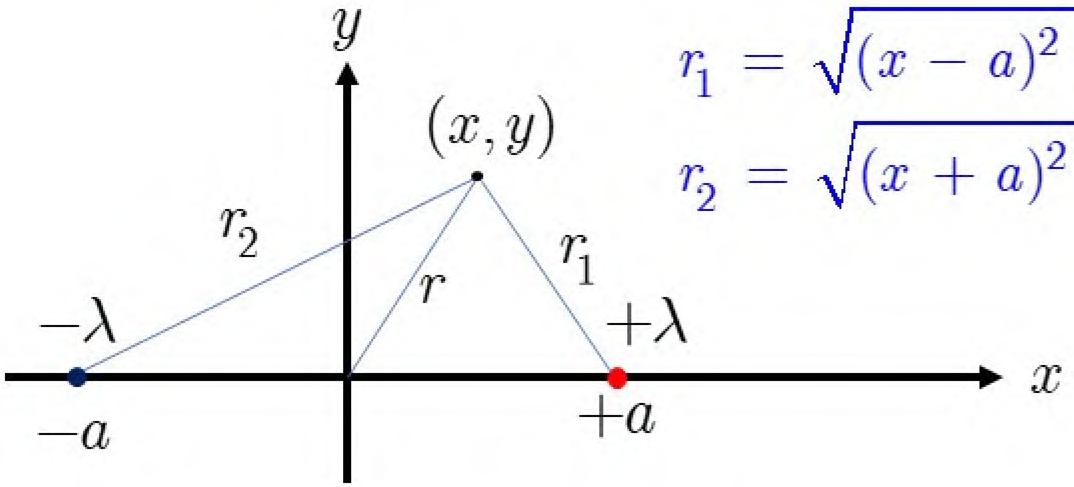
$$\boxed{V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r}{b}}$$

دانشگاه خوارزمی

دو میله‌ی باردار نامتناهی موازی محور z، یکی با چگالی $\lambda-$ در $x=-a$ و دیگری با چگالی $\lambda+$ در $x=+a$ قرار دارند. پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ای با مختصات (x,y) به دست آورید.



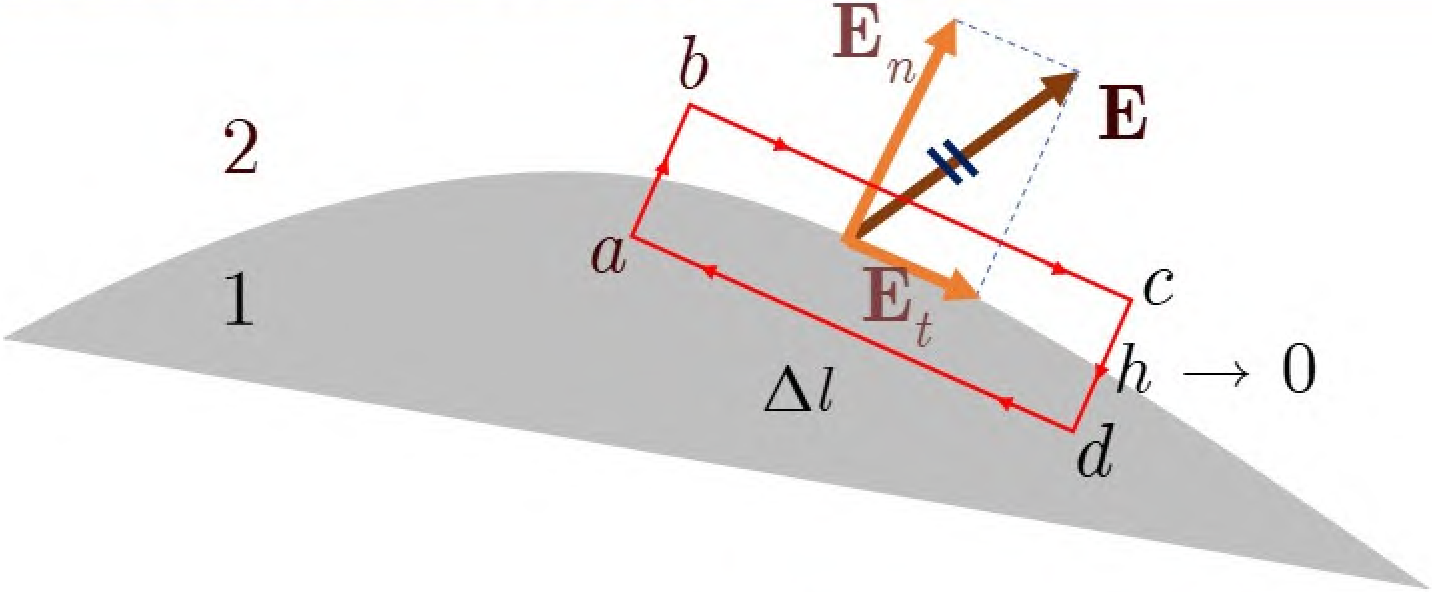
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$



$$\begin{aligned} V &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_1}{b} - \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{b} \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\ln\frac{r_1}{b} - \ln\frac{r_2}{b}\right] \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2} \end{aligned}$$

$$V(x,y) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}$$

سطح رسانا، سطح هم‌پتانسیل است



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$h \to 0 \qquad \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_b^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_c^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_d^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$E_{2t}\Delta l - E_{1t}\Delta l = 0$$

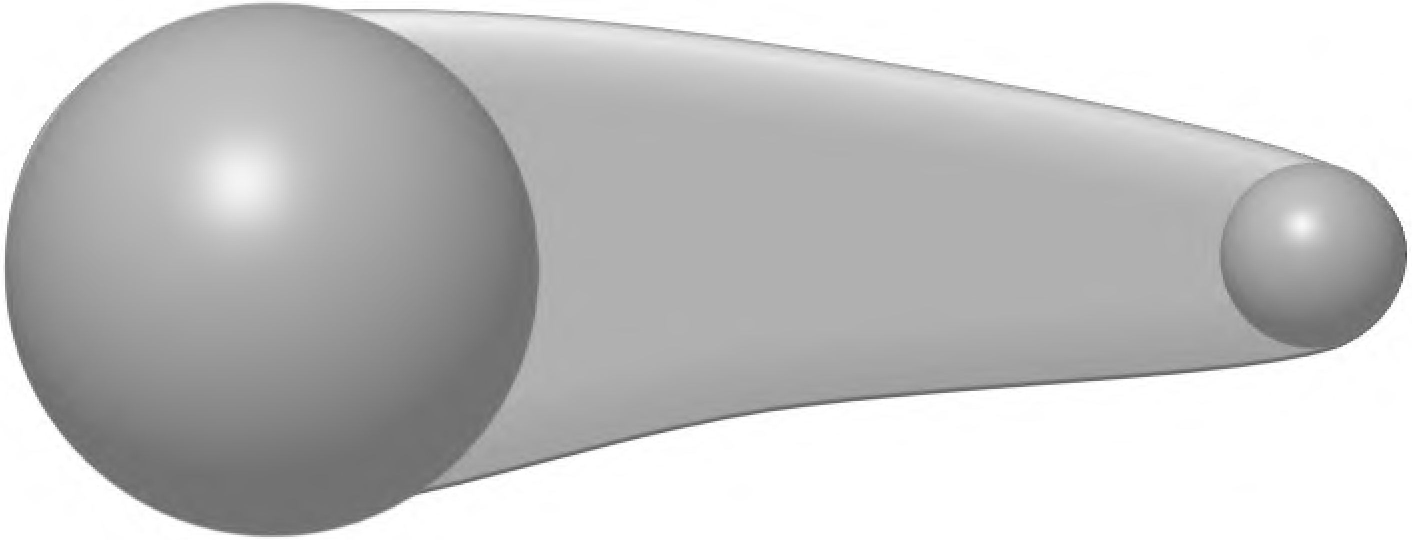
$$E_{2t} = E_{1t}$$

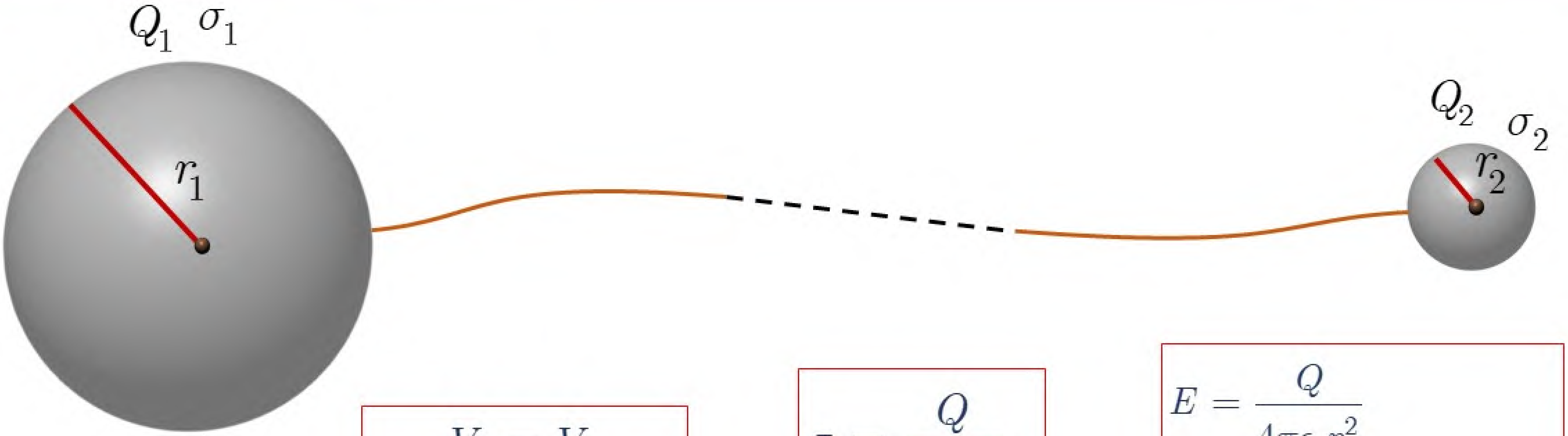
$$E_{1t} = 0 \Rightarrow E_{2t} = 0$$

$$\boxed{\mathbf{E}_t = 0}$$

دانشگاه خوارزمی

بار الکتریکی بر روی یک کره‌ی رسانای منزوی به طور یکنواخت توزیع می‌شود، اما برای رساناهای با شکل دلخواه چنین نیست. در نقاط نوک تیز چگالی سطحی بار بیش‌تر است (و در نتیجه میدان الکتریکی در نزدیکی آن نقاط بیش تر است).





$$V_1 = V_2$$

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

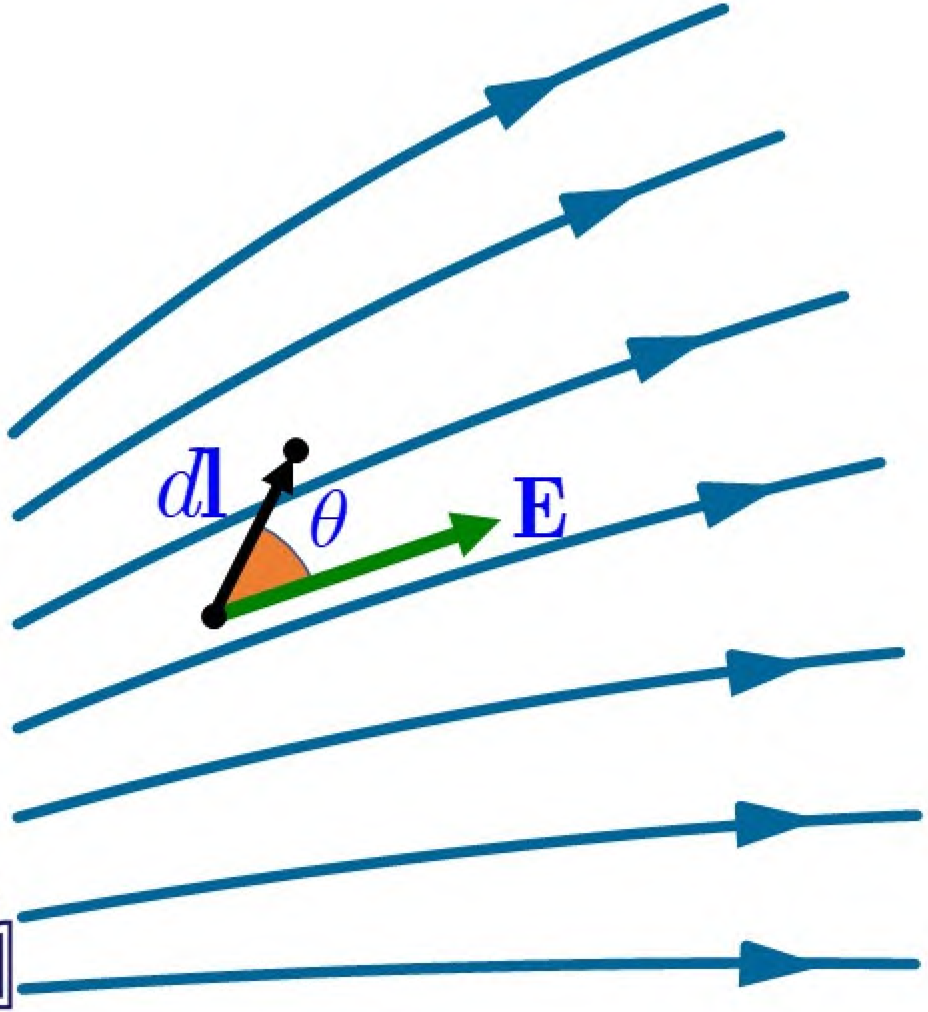
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1}{Q_2}\frac{{r_2}^2}{{r_1}^2}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 {r_1}^2}}{\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 {r_2}^2}} = \frac{Q_1}{Q_2}\frac{{r_2}^2}{{r_1}^2}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1}$$



$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -Edl\cos\theta$$

$$E\cos\theta = -\frac{dV}{dl} \qquad E_l = -\frac{dV}{dl}$$

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad dV = -Edl$$

$$\theta = \pi \quad \Rightarrow \quad dV = Edl$$

$$\left|E\right| = \left(\frac{dV}{dl}\right)_{\max}$$

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

$$dV = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial V}{\partial x_i}dx_i = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\mathbf{E} = -\left(\hat{\mathbf{e}}_x\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$\mathbf{E} = -\left(\hat{\mathbf{e}}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)V$$

$$\boxed{\vec{\nabla} = \hat{\mathbf{e}}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = -\vec{\nabla}V}$$

دانشگاه خوارزمی

مثال: پتانسیل الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا به شکل زیر بر حسب ولت داده شده است. فواصل بر حسب متر هستند

$$V\left(x,y,z\right) = 5\sin\left(\frac{\pi}{6}xy\right)e^{-2z}$$

الف) پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ی (1,1,0) حساب کنید

$$\boxed{V\left(1,1,0\right) = 5\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2.5\ \text{V}}$$

ب) میدان الکتریکی را در نقطه‌ی (1,1,0) حساب کنید

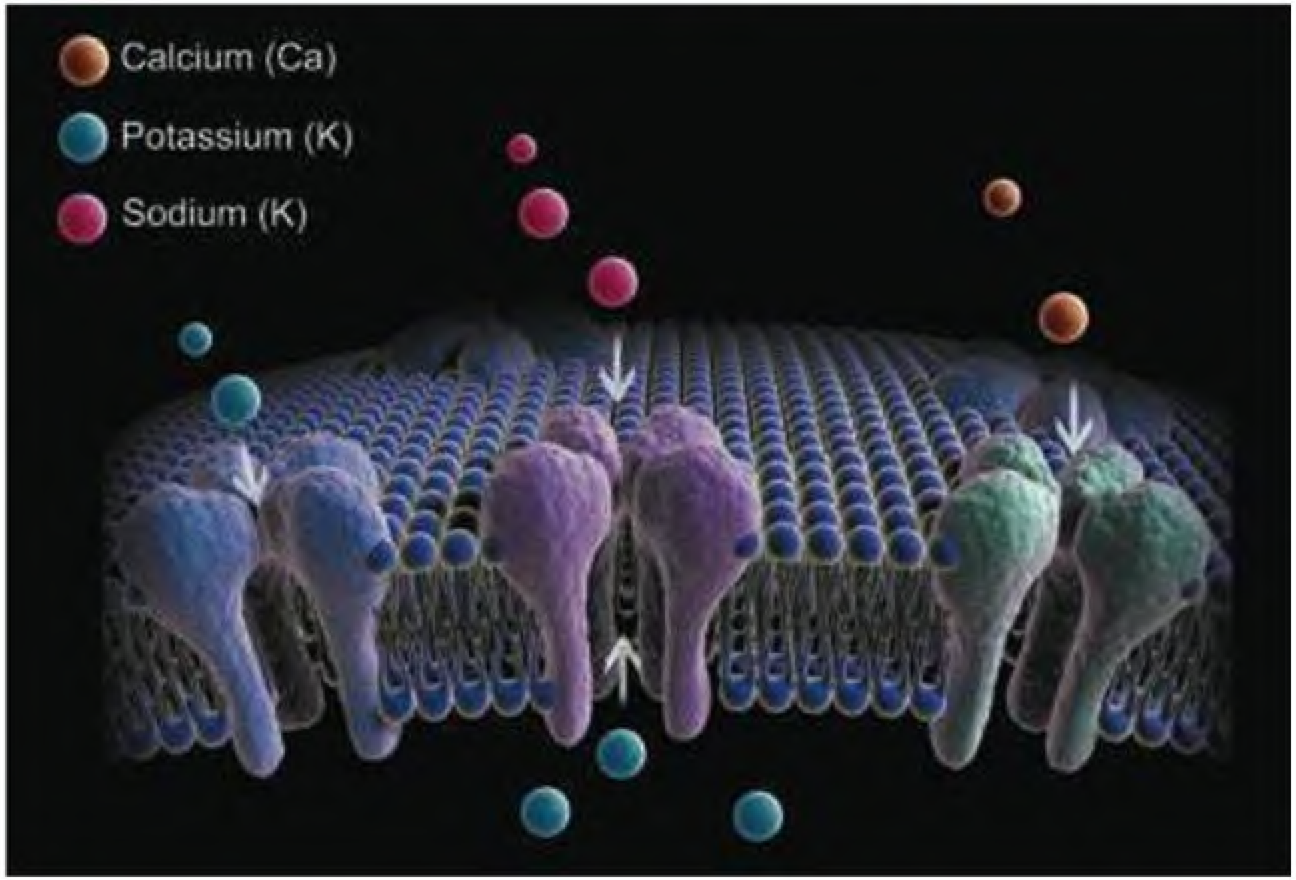
$$\boxed{\mathbf{E} = -\left(\hat{\mathbf{e}}_x\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z\frac{\partial V}{\partial z}\right)}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(x,y,z) = -\hat{\mathbf{e}}_x\frac{5\pi}{6}y\cos\left(\frac{\pi}{6}xy\right)e^{-2z} - \hat{\mathbf{e}}_y\frac{5\pi}{6}x\cos\left(\frac{\pi}{6}xy\right)e^{-2z} - \hat{\mathbf{e}}_z(-2)\sin\left(\frac{\pi}{6}xy\right)e^{-2z}}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(1,1,0) = -\hat{\mathbf{e}}_x\frac{5\sqrt{3}\pi}{12} - \hat{\mathbf{e}}_y\frac{5\sqrt{3}\pi}{12} + \hat{\mathbf{e}}_z}$$

دانشگاه خوارزمی

BIO Application Potential Gradient Across a Cell Membrane The interior of a human cell is at a lower electric potential V than the exterior. (The potential difference when the cell is inactive is about -70 mV in neurons and about -95 mV in skeletal muscle cells.) Hence there is a potential gradient $\vec{\nabla}V$ that points from the *interior* to the *exterior* of the cell membrane, and an electric field $\vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\nabla}V$ that points from the *exterior* to the *interior*. This field affects how ions flow into or out of the cell through special channels in the membrane.



SEARS AND ZEMANSKY'S
UNIVERSITY PHYSICS
WITH MODERN PHYSICS
14TH EDITION
GLOBAL EDITION

HUGH D. YOUNG
ROGER A. FREEDMAN
University of California, Santa Barbara
CONTRIBUTING AUTHOR
A. LEWIS FORD
Texas A&M University

Chapter 23
Page 797

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید