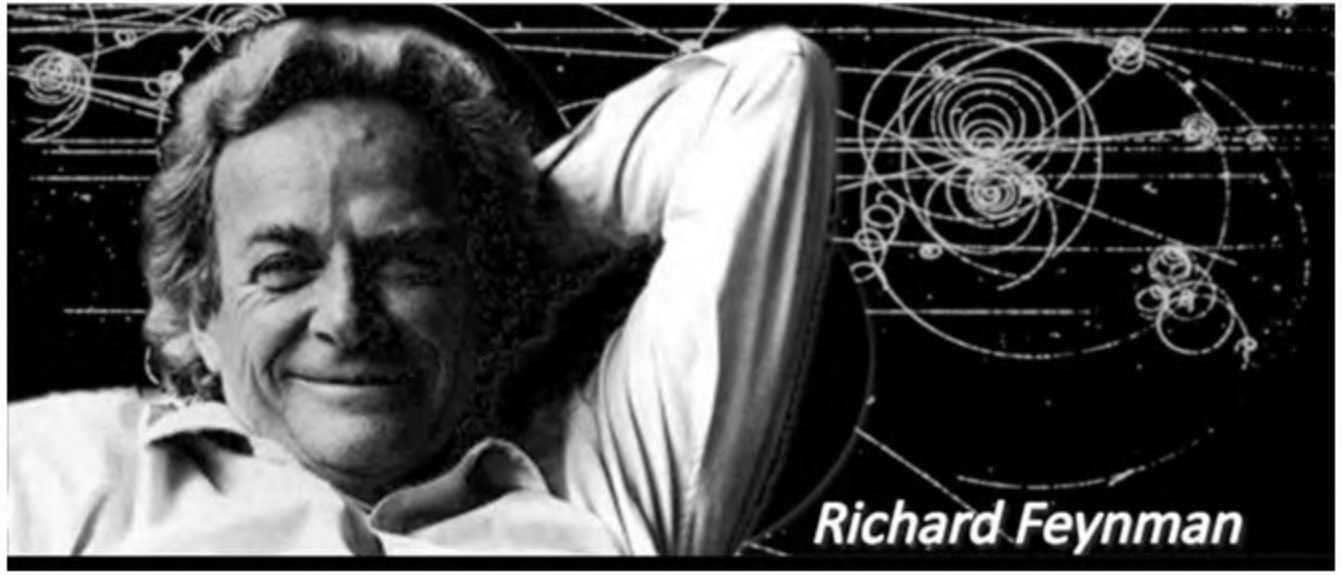
Fundamentals of Physics II

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

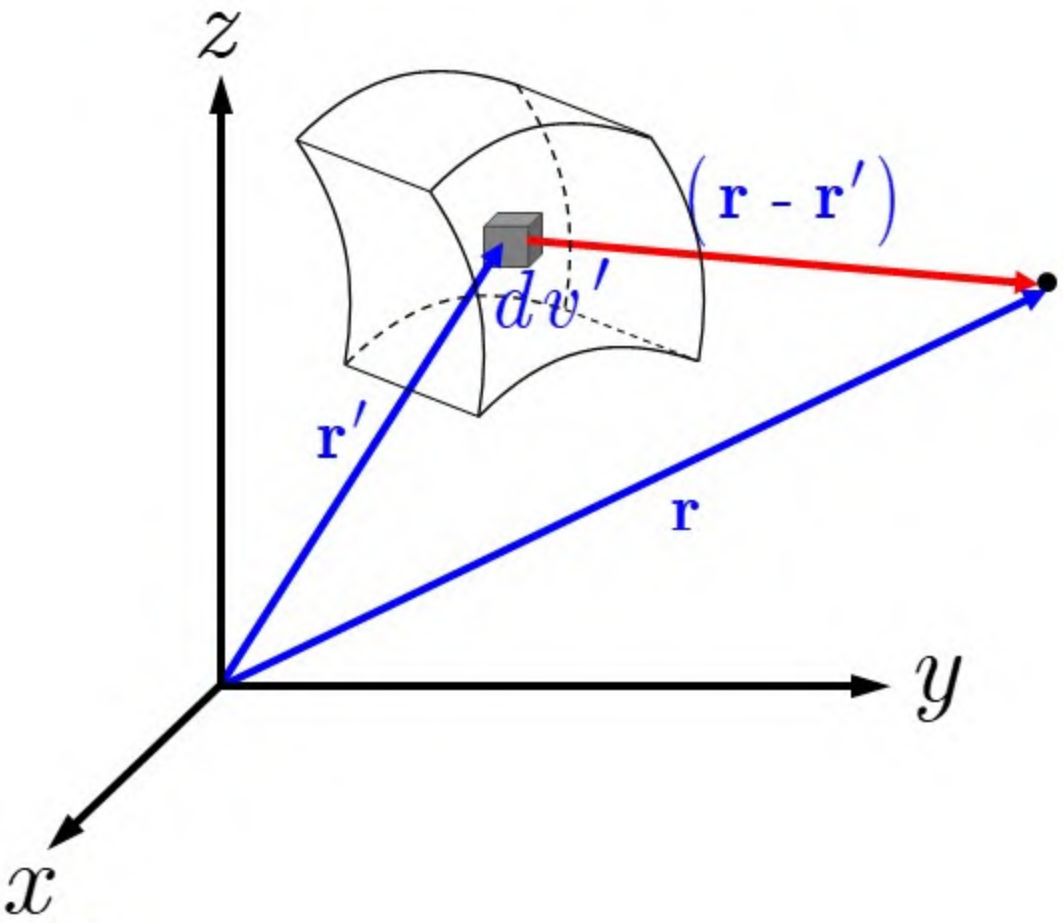
درس نوزدهم

پتانسیل الکتریکی - بخش۴

Electric Potential-part4

دانشگاه خوارزمی

پتانسیل ناشی از یک توزیع پیوسته‌ی بار



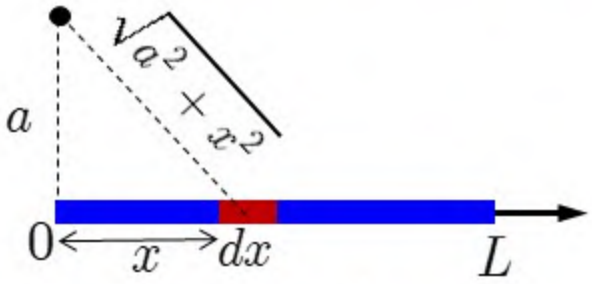
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

دانشگاه خوارزمی

بار الکتریکی Q به طور یکنواخت بر میله‌ی نازک نارسانایی به طول L توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی ناشی از این توزیع بار را در نقطه‌ای به فاصله‌ی عمودی a از یک لبه‌ی میله پیدا کنید.



$$dq = \lambda dx = \frac{Q}{L}dx$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\int_0^L \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a\sinh u \\ dx &= a\cosh u du \end{aligned}}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\int \frac{a\cosh u du}{a\sqrt{1+\sinh^2 u}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\int du$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^L$$

$$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\sinh^{-1}\left(\frac{L}{a}\right)}$$

$$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\int_0^L \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\ln\left[x+\sqrt{a^2+x^2}\right]_0^L = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\ln\left[\frac{L+\sqrt{a^2+L^2}}{a}\right]}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

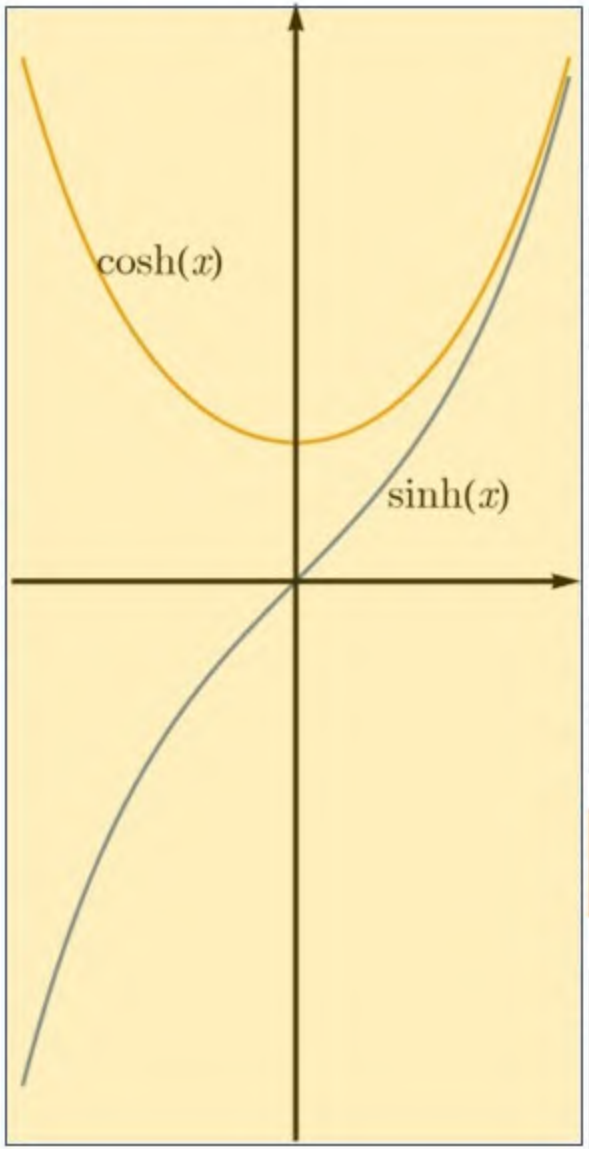
$$\sinh(0) = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$\sinh(-x) = -\sinh(x)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(0) = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$



$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

دانشگاه خوارزمی

محاسبه‌ی پتانسیل برای یک توزیع بار پیوسته

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\sinh^{-1}\left(\frac{L}{a}\right) \xrightarrow{?} V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\ln\left[\frac{L+\sqrt{a^2+L^2}}{a}\right]$$

$$y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$x = \sinh^{-1}(y)$$ در جستجوی x هستیم

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$A = e^x$$

$$y = \frac{A - \frac{1}{A}}{2}$$

$$2y = A - \frac{1}{A}$$

$$A^2 - 2yA - 1 = 0$$

$$A = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

$$A = e^x = y + \sqrt{y^2+1} \quad \Rightarrow \quad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

$$\sinh^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

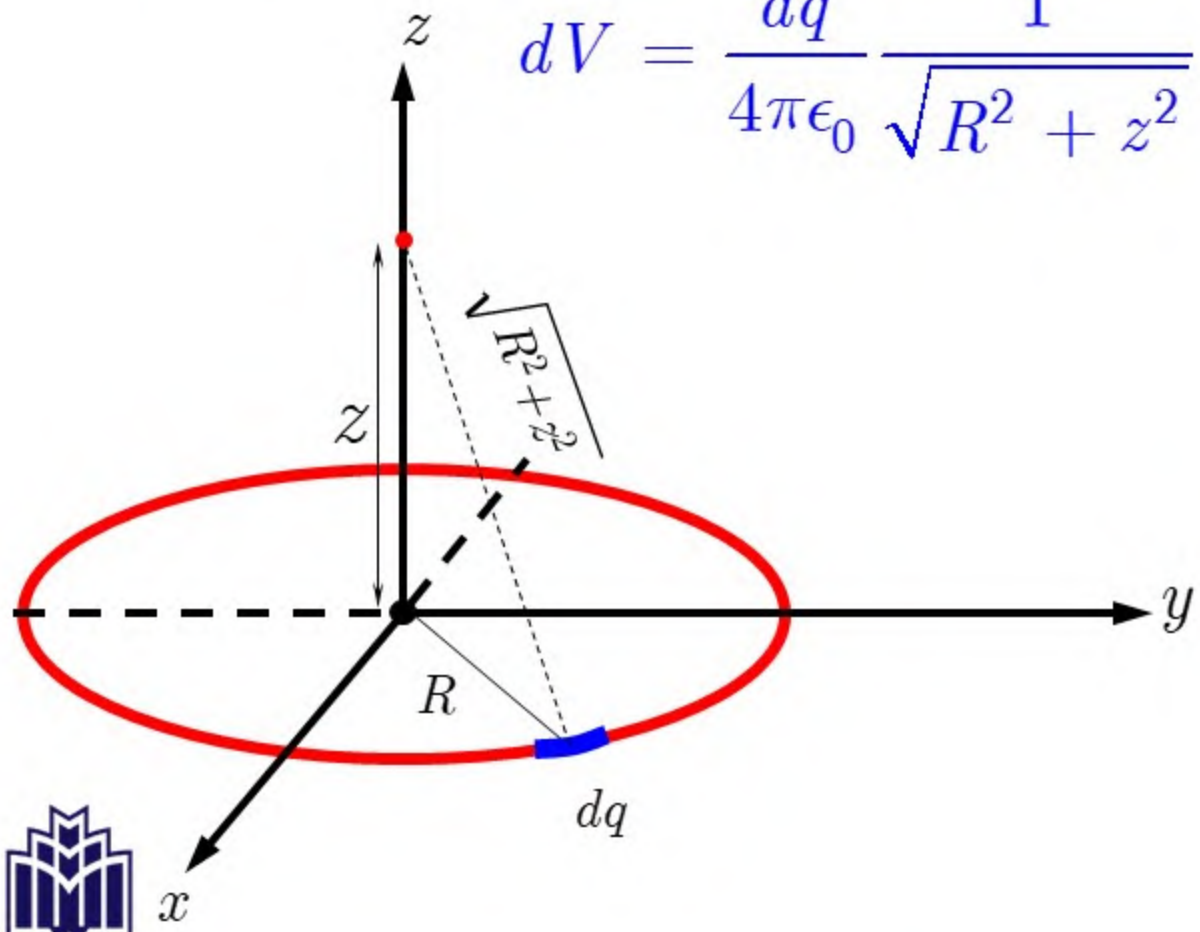
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\sinh^{-1}\left(\frac{L}{a}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{L}{a} + \sqrt{1+\frac{L^2}{a^2}}\right)$$

دانشگاه خوارزمی

محاسبه‌ی پتانسیل برای یک توزیع بار پیوسته

بار الکتریکی Q به طور یکنواخت بر حلقه ی دایره ای به شعاع R توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی را بر روی محور حلقه در فاصله‌ی z پیدا کنید.

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}$$



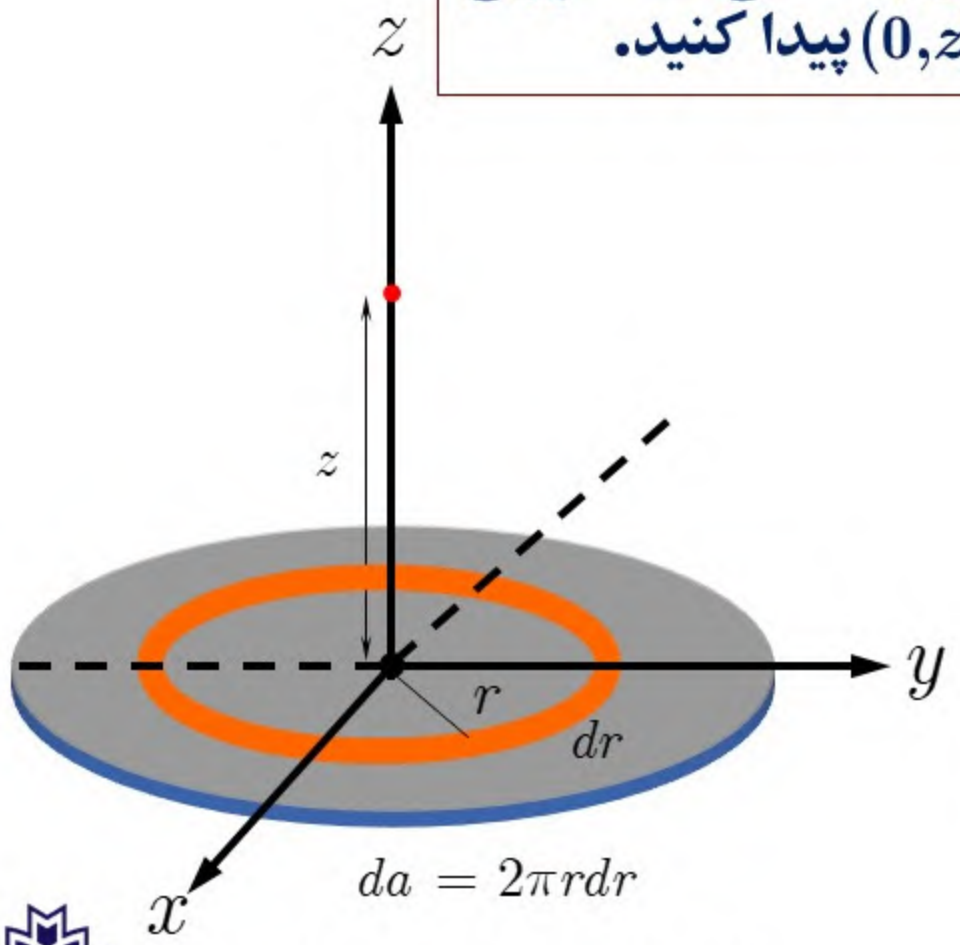
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}\int dq$$

$$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}}$$

$$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 u}}$$

محاسبه‌ی پتانسیل برای یک توزیع بار پیوسته

بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی σ بر روی قرص دایره ای به شعاع R توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی را با توجه به شکل زیر در نقطه‌ی $(0,z)$ پیدا کنید.



$$da = 2\pi r dr$$

$$dq = \sigma da = \sigma 2\pi r dr$$

پتانسیل ناشی از حلقه‌ی باردار

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{r=0}^{r=R}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

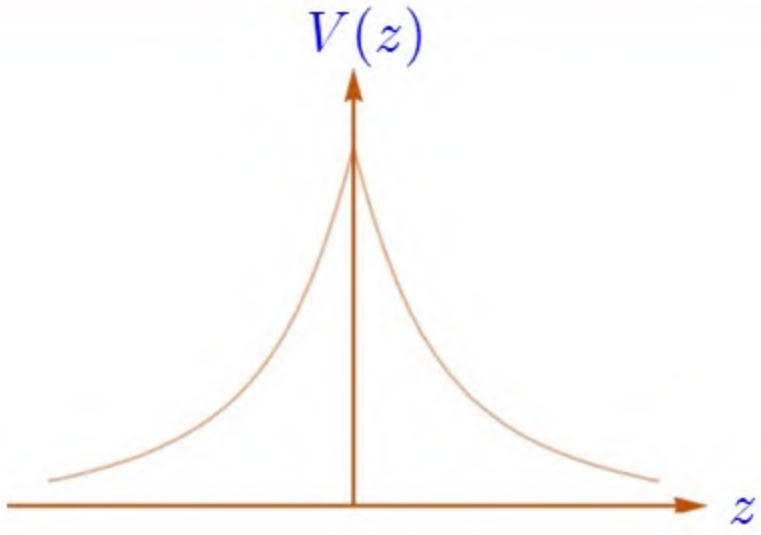
$$r^2 + z^2 = u^2 \Rightarrow rdr = udu$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$$

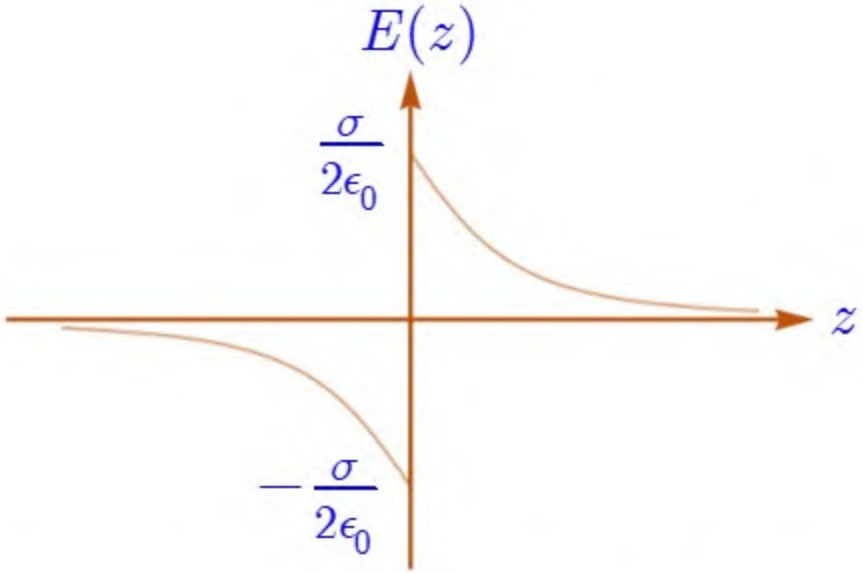
دانشگاه خوارزمی

مثال

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z|\right]$$



$$E_z(z) = -\frac{\partial V(z)}{\partial z} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) & z < 0 \end{cases}$$



دانشگاه خوارزمی

محاسبه‌ی پتانسیل برای یک توزیع بار پیوسته

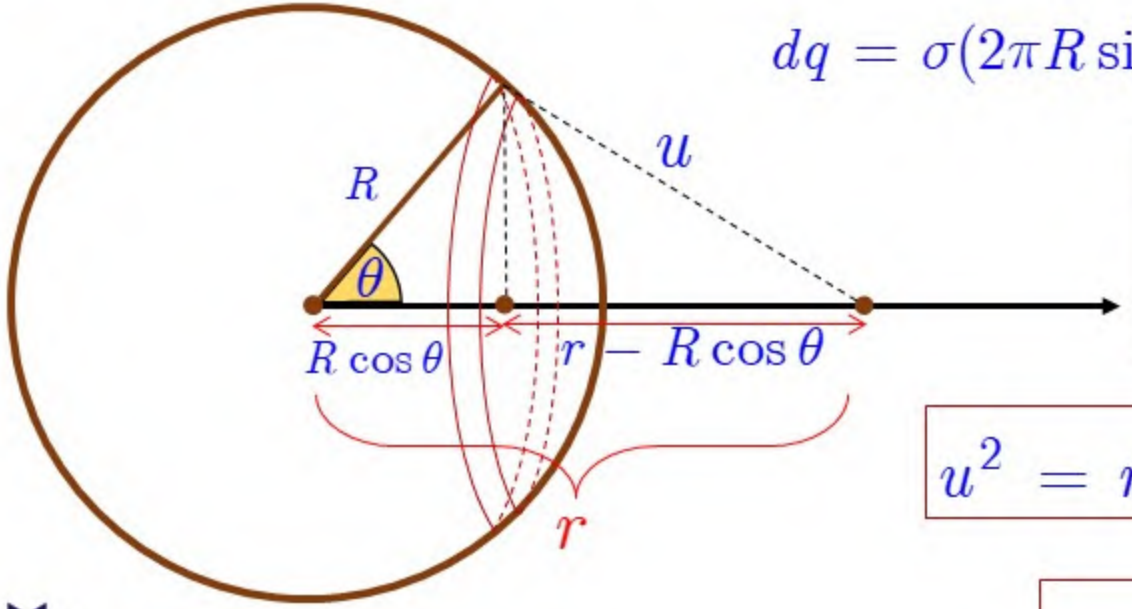
بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی σ بر روی یک پوسته‌ی کروی به شعاع R توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی را در داخل و خارج پوسته پیدا کنید.

$$u = \sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}$$

پتانسیل ناشی از حلقه‌ی باردار

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 u}$$

$$dq = \sigma(2\pi R\sin\theta)Rd\theta$$



$$V(r) = \frac{2\pi R^2\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}}$$

$$u^2 = r^2 - 2rR\cos\theta + R^2$$

$$2udu = 2rR\sin\theta d\theta$$

$$V(r) = \frac{2\pi R^2\sigma}{4\pi\epsilon_0 rR}\int_{u_1}^{u_2}\frac{udu}{u} = \frac{R\sigma}{2\epsilon_0 r}(u_2 - u_1)$$

دانشگاه خوارزمی

مثال

$$\theta = 0 \rightarrow u_1 = \sqrt{r^2 - 2rR + R^2} = \sqrt{(r-R)^2} = |r - R|$$

$$\theta = \pi \rightarrow u_2 = \sqrt{r^2 + 2rR + R^2} = \sqrt{(r+R)^2} = r + R$$

$$V(r) = \frac{2\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 rR}\int_{u_1}^{u_2}\frac{u\,du}{u} = \frac{R\sigma}{2\epsilon_0 r}(u_2 - u_1)$$

الف) $r>R$

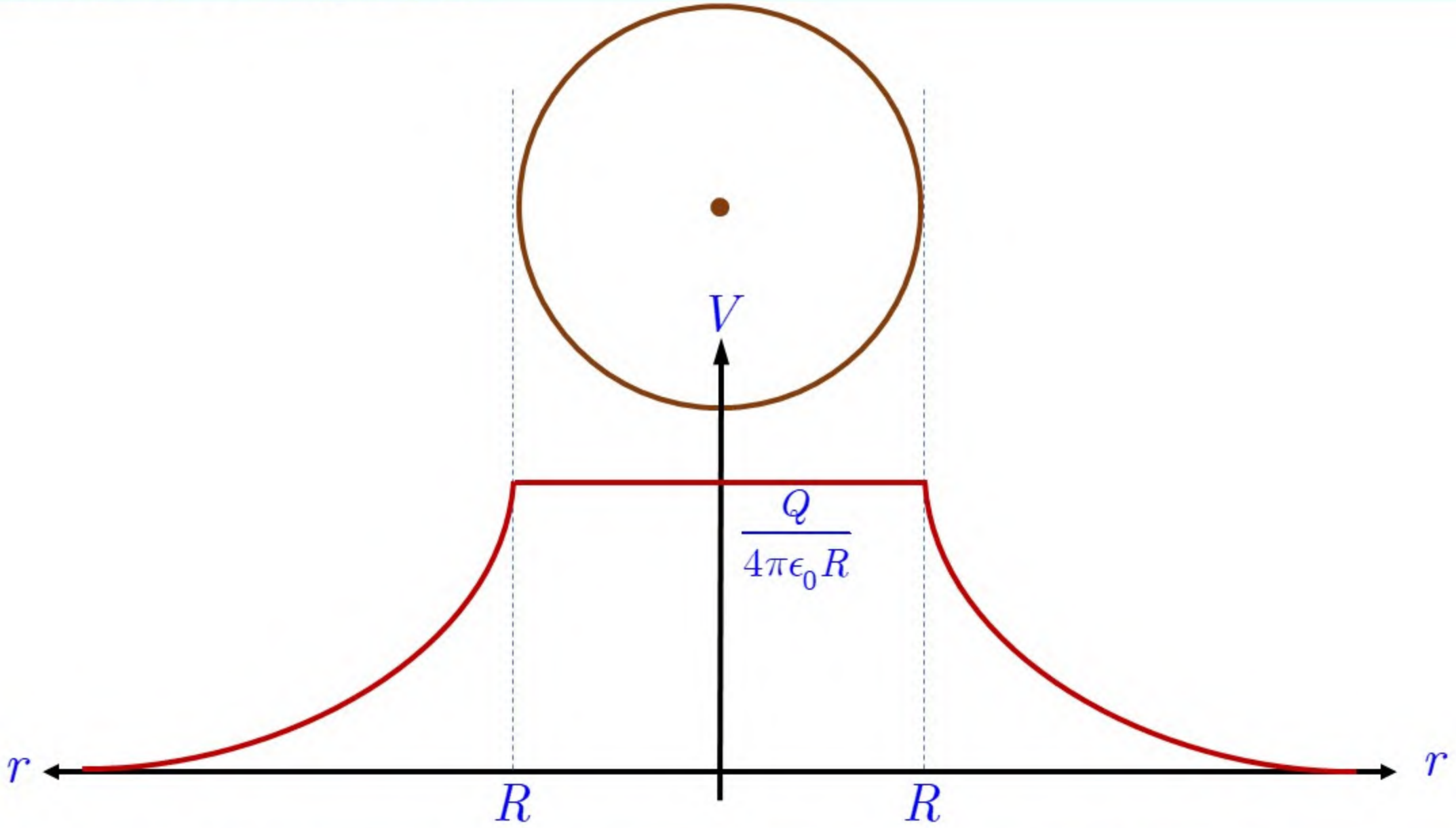
$$V = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\frac{1}{r}\big((r+R)-(r-R)\big) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

ب) $r<R$

$$V = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\frac{1}{r}\big((r+R)-(R-r)\big) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

دانشگاه خوارزمی

مثال



شاد و مهربان باشید