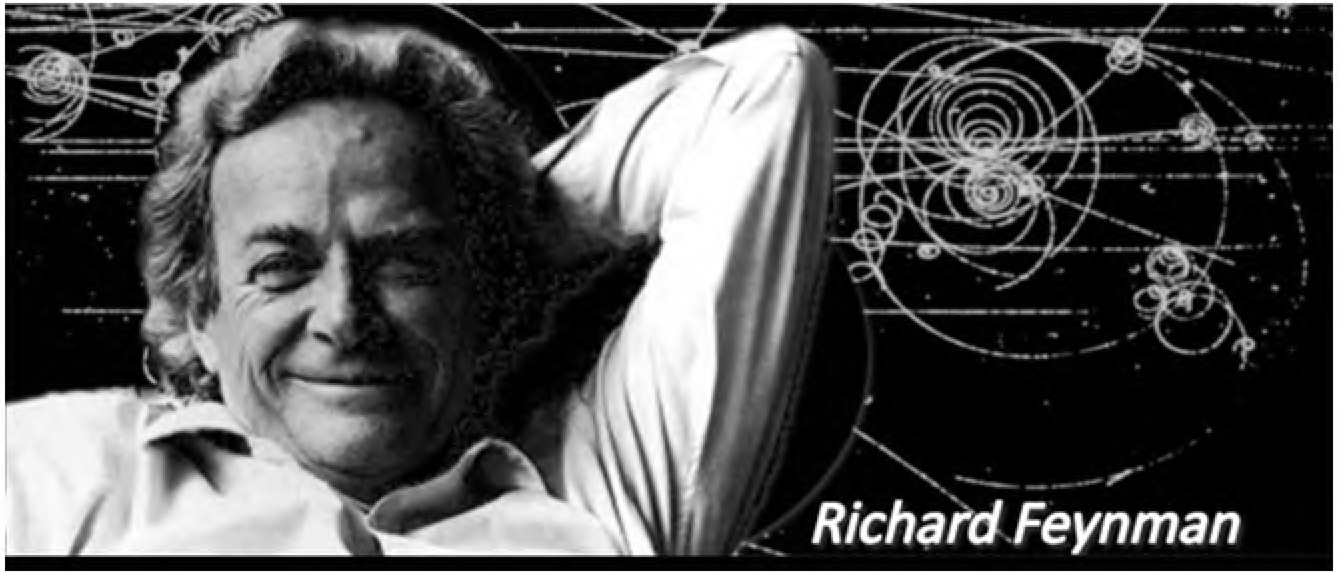
Fundamentals of Physics II

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

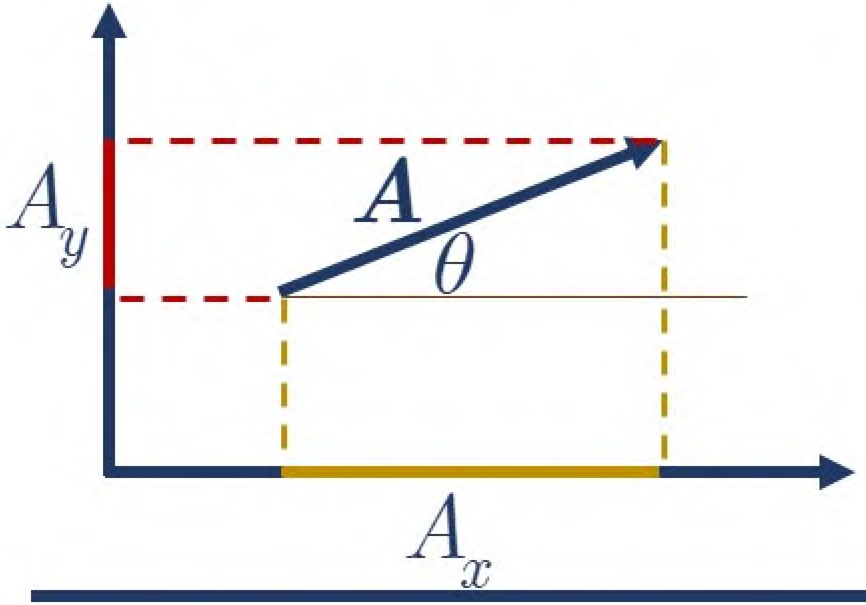
درس دوم

جبر برداری- بخش۲

دانشگاه خوارزمی

- نمایش بردار برحسب مؤلفه‌های بردار
- جمع برداری روش تحلیلی
- ضرب نرده‌ای و ضرب برداری برحسب مؤلفه‌ها
- زاویه‌ی بین دو بردار برحسب مؤلفه‌ها
- ضرب‌های سه‌گانه- قاعده‌ی بک - کب
- تقسیم بردارها!

دانشگاه خوارزمی

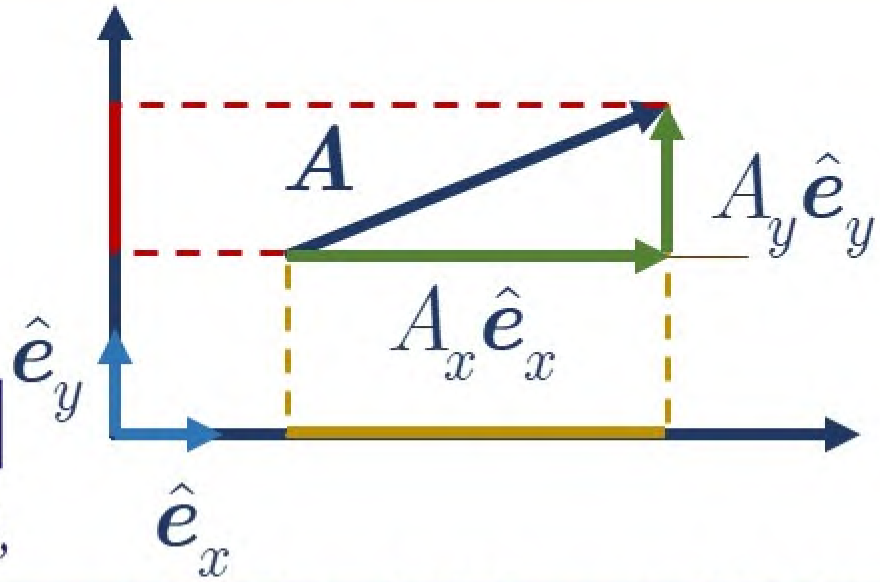


$$A^2 = A_x^2 + A_y^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

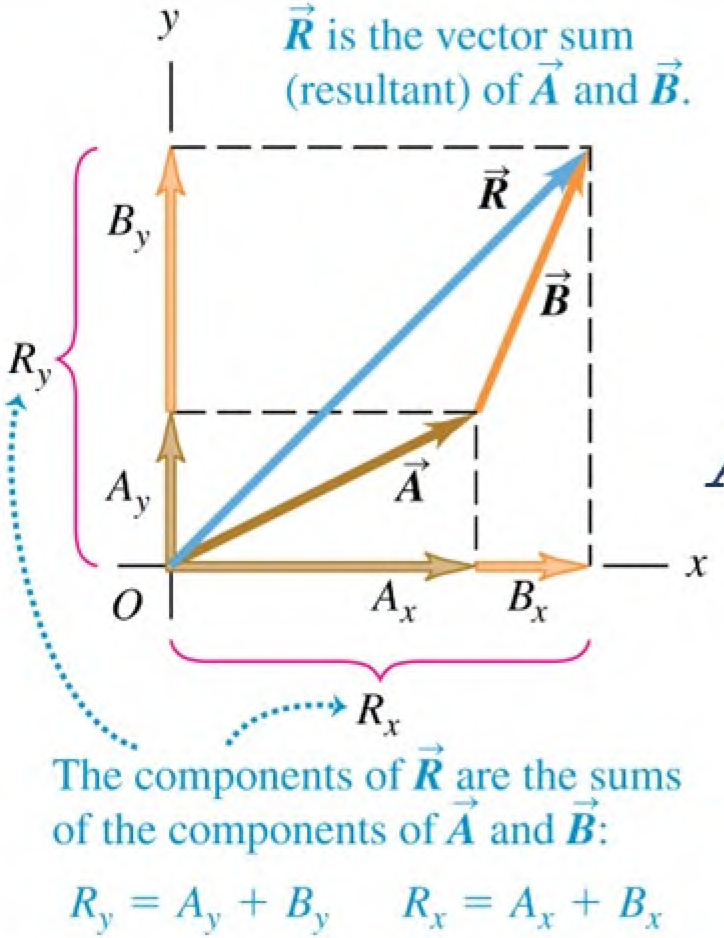
$$A_x = A\cos\theta$$

$$A_y = A\sin\theta$$



$$\boldsymbol{A} = A_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + A_y\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ \\ A_y \end{pmatrix}$$



برای دو بُعد:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\boldsymbol{e}}_x + \left(A_y + B_y\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

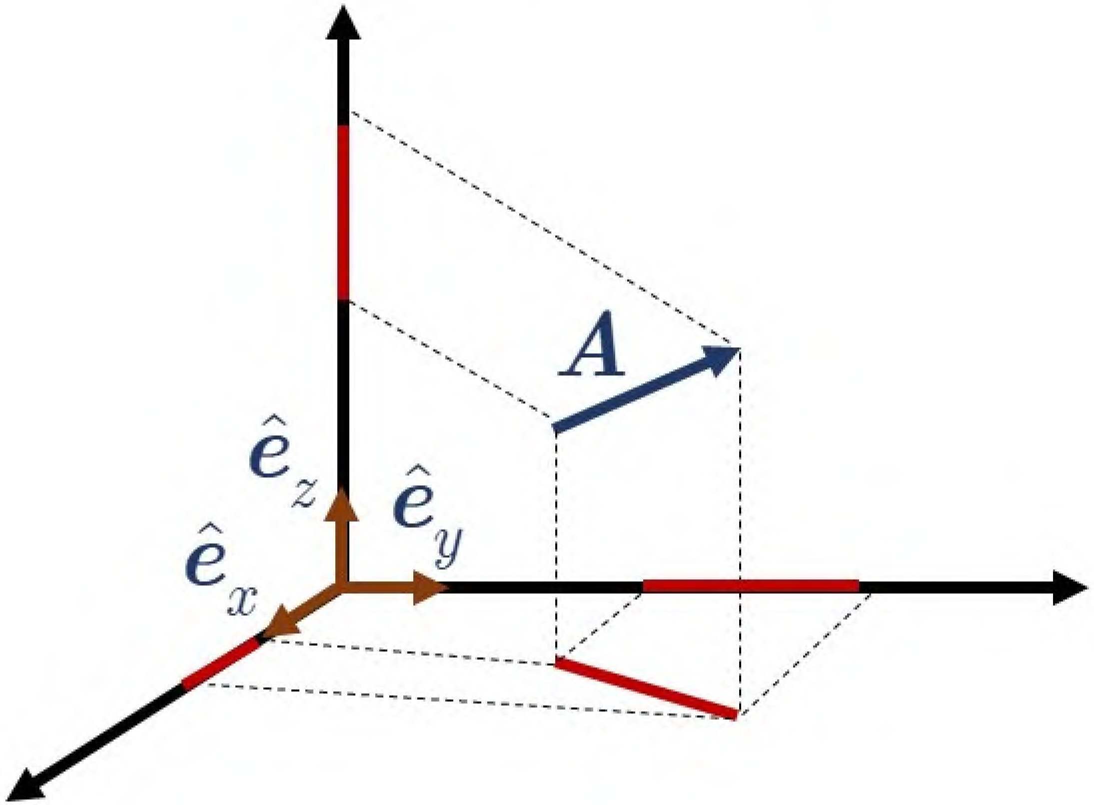
برای سه بُعد:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\boldsymbol{e}}_x + \left(A_y + B_y\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y + \left(A_z + B_z\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

رابطه‌ی زیر را نیز اثبات کنید

$$\alpha\boldsymbol{A} = \left(\alpha A_x\right)\hat{\boldsymbol{e}}_x + \left(\alpha A_y\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y + \left(\alpha A_z\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

دانشگاه خوارزمی



$$\boldsymbol{A} = A_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + A_y\hat{\boldsymbol{e}}_y + A_z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

دانشگاه خوارزمی

$$\hat{\boldsymbol{e}}_x \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y = \left|\hat{\boldsymbol{e}}_x\right|\left|\hat{\boldsymbol{e}}_y\right| \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_x \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x = \hat{\boldsymbol{e}}_y \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y = \hat{\boldsymbol{e}}_z \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = 1$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_x \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y = \hat{\boldsymbol{e}}_x \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{e}}_y \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = 0$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x &= \left(A_x \hat{\boldsymbol{e}}_x + A_y \hat{\boldsymbol{e}}_y\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x \\ &= A_x \hat{\boldsymbol{e}}_x \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x + A_y \hat{\boldsymbol{e}}_y \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x \\ &= A_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{A} \cdot \left(B_x \hat{\boldsymbol{e}}_x + B_y \hat{\boldsymbol{e}}_y\right) \\ &= B_x \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x + B_y \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y \\ &= A_x B_x + A_y B_y \end{aligned}$$

برای سه بُعد: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}}$$

دانشگاه خوارزمی

بردارهای $A = 2\hat{e}_x$ و $B = \sqrt{3}\hat{e}_x + \hat{e}_y$ مفروض‌اند. زاویه‌ی بین آن‌ها را به دست آورید .

$$\boxed{\cos\theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

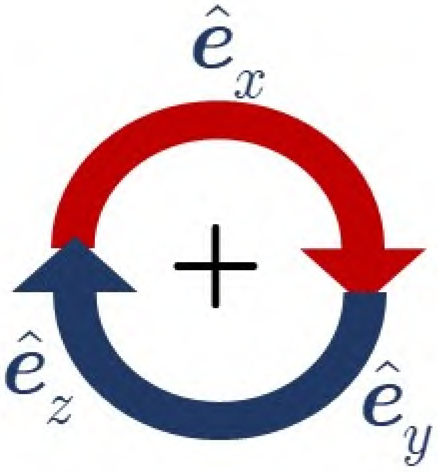
$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}}$$

برنامه‌ای بنویسید **(ترجیحا با پایتون)** که با اجرای آن از کاربر مؤلفه‌های دو بردار خواسته شود. سپس با دریافت مؤلفه‌ها، زاویه‌ی بین آن دو بردار را برحسب **رادیان** و **درجه** حساب کند.

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \hat{\boldsymbol{e}}_x = \hat{\boldsymbol{e}}_y \times \hat{\boldsymbol{e}}_y = \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \hat{\boldsymbol{e}}_z = 0}$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \hat{\boldsymbol{e}}_y = \hat{\boldsymbol{e}}_z} \qquad \boxed{\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \hat{\boldsymbol{e}}_x = -\hat{\boldsymbol{e}}_z}$$



دانشگاه خوارزمی

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{e}}_x &= \left(A_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + A_y\hat{\boldsymbol{e}}_y + A_z\hat{\boldsymbol{e}}_z\right)\times\hat{\boldsymbol{e}}_x\\ &= 0 + A_y\hat{\boldsymbol{e}}_y\times\hat{\boldsymbol{e}}_x + A_z\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\hat{\boldsymbol{e}}_x\\ &= -A_y\hat{\boldsymbol{e}}_z + A_z\hat{\boldsymbol{e}}_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{e}}_y &= \left(A_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + A_y\hat{\boldsymbol{e}}_y + A_z\hat{\boldsymbol{e}}_z\right)\times\hat{\boldsymbol{e}}_y\\ &= A_x\hat{\boldsymbol{e}}_x\times\hat{\boldsymbol{e}}_y + 0 + A_z\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\hat{\boldsymbol{e}}_y\\ &= A_x\hat{\boldsymbol{e}}_z - A_z\hat{\boldsymbol{e}}_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{e}}_z &= \left(A_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + A_y\hat{\boldsymbol{e}}_y + A_z\hat{\boldsymbol{e}}_z\right)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\\ &= A_x\hat{\boldsymbol{e}}_x\times\hat{\boldsymbol{e}}_z + A_y\hat{\boldsymbol{e}}_y\times\hat{\boldsymbol{e}}_z + 0\\ &= -A_x\hat{\boldsymbol{e}}_y + A_y\hat{\boldsymbol{e}}_x\end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

ضرب برداری بر حسب مؤلفه‌ها

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{A}\times\left(B_x\hat{\boldsymbol{e}}_x+B_y\hat{\boldsymbol{e}}_y+B_z\hat{\boldsymbol{e}}_z\right)=B_x\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{e}}_x+B_y\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{e}}_y+B_z\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\\
&=B_x\left(-A_y\hat{\boldsymbol{e}}_z+A_z\hat{\boldsymbol{e}}_y\right)+B_y\left(A_x\hat{\boldsymbol{e}}_z-A_z\hat{\boldsymbol{e}}_x\right)+B_z\left(-A_x\hat{\boldsymbol{e}}_y+A_y\hat{\boldsymbol{e}}_x\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= \left(A_yB_z-A_zB_y\right)\hat{\boldsymbol{e}}_x\\
&\quad-\left(A_xB_z-A_zB_x\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y\\
&\quad+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_x-\begin{vmatrix}A_x & A_z\\ B_x & B_z\end{vmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_y+\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_z
$$

$$
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}
$$

$\mathbf{F} = -8\hat{i}+6\hat{j}$ Newtons acts on a particle with position vector $\mathbf{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ meters relative to the coordinate origin. What are (i) the torque on the particle about the origin and (ii) the angle between the directions of $\mathbf{F}$ and $\mathbf{r}$?

$$\boxed{\tau = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = (3\hat{\boldsymbol{i}} + 4\hat{\boldsymbol{j}}) \times (-8\hat{\boldsymbol{i}} + 6\hat{\boldsymbol{j}}) = 50\hat{\boldsymbol{k}}\ \mathrm{N.m}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F}}{rF} = \frac{(3\hat{\boldsymbol{i}} + 4\hat{\boldsymbol{j}})\cdot(-8\hat{\boldsymbol{i}} + 6\hat{\boldsymbol{j}})}{\sqrt{9+16}\sqrt{64+36}} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}}$$

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\times\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

قاعده‌ی بک – کب

BAC-CAB rule

$$\boldsymbol{A}\times\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right)\neq\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)\times\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right)=\boldsymbol{B}\cdot\left(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}\right)$$

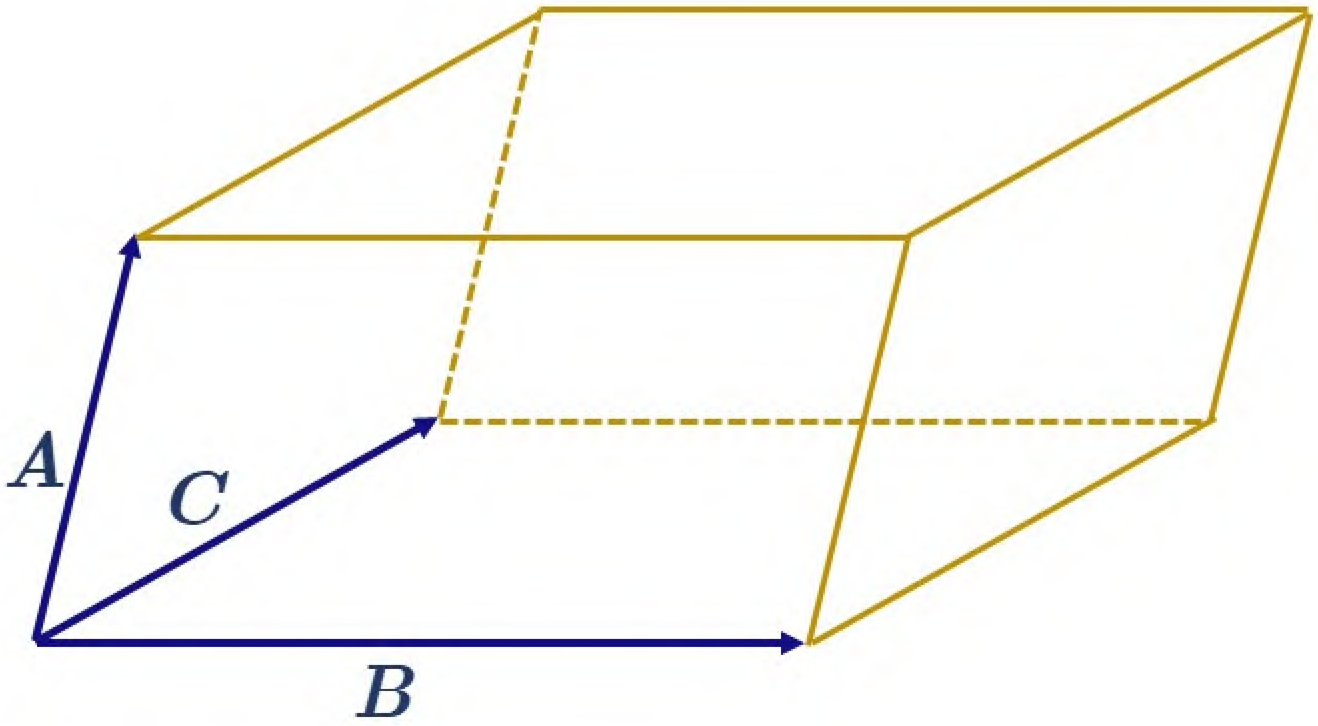
$$=\boldsymbol{C}\cdot\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)$$

$$=-\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}\right)$$

$$=-\boldsymbol{B}\cdot\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}\right)$$

$$=-\boldsymbol{C}\cdot\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}\right)$$

دانشگاه خوارزمی



$$V = \left| \boldsymbol{A} \cdot \left(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} \right) \right|$$ حجم متوازی‌السطوح

دانشگاه خوارزمی

در جبر اعداد به معادلاتی به شکلِ $3x = 6$ برمی‌خوریم. که x مجهولی است که در پی یافتن آن هستیم. مقدار x به طور منحصر به فرد به شکلِ $2 = \frac{6}{3} = x$ به دست می آید. بدین ترتیب در جبرِ اعداد مفهوم تقسیم وارد می‌شود و با معنی است.
در این‌جا می‌خواهیم ببینیم آیا در مورد بردارها تقسیم به همین معنا به کار می رود؟

فرض کنید یک معادله‌ی برداری به شکل زیر داریم

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = a$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\boldsymbol{X}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} a$$

پاسخ فوق منحصر به فرد نیست

$$\boxed{\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} a + \boldsymbol{B} \quad ; \qquad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0}$$

دانشگاه خوارزمی

همچنین معادله‌ی برداری زیر را در نظر بگیرید

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$$

این معادله نیز پاسخ یکتا ندارد:

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} + k\boldsymbol{A}$$

k هر مقدار دلخواهی است

اگر یک دستگاه معادلات به شکل زیر داشته باشیم:

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = a \\ \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} + \frac{a}{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}}$$

شاد و مهربان باشید