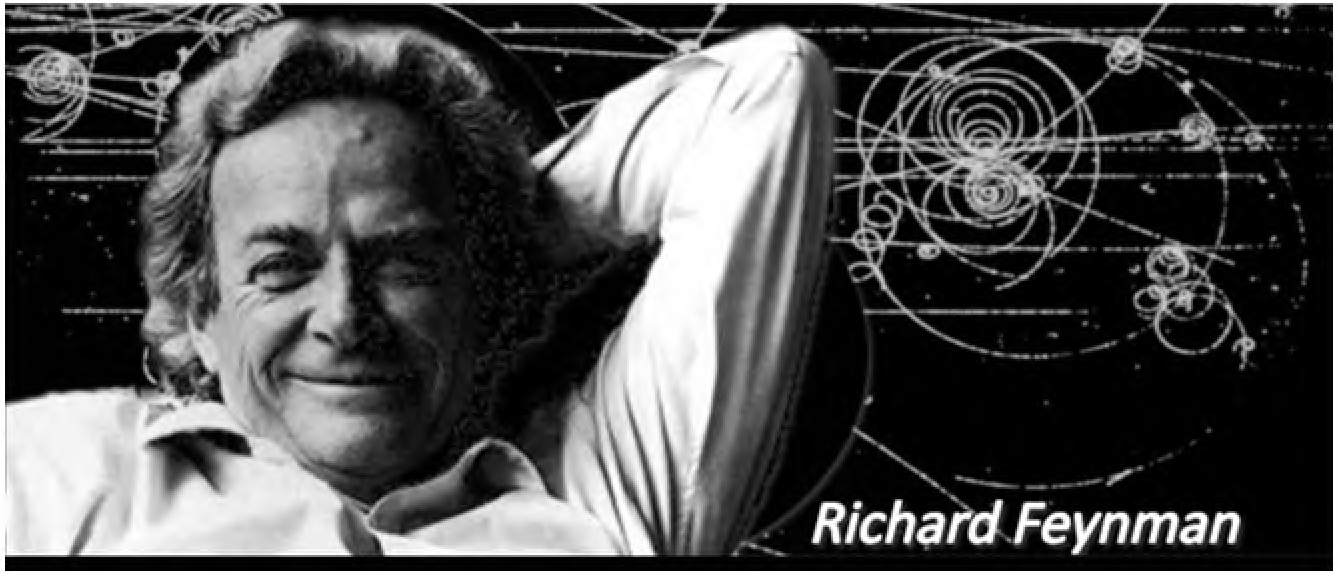
Fundamentals of Physics II

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس سوم

جبر برداری- بخش۳

- ✍ نماد دلتای کرونکر
- ✍ نماد لِوی چیویتا
- ✍ نوشتن روابط برداری با کمک نمادهای کرونکر و لوی چیویتا
- ✍ اثبات قاعده‌ی بک ـ کب با استفاده از نمادهای کرونکر و لوی چیویتا

KRONECKER DELTA SYMBOL

Leopold Kronecker
(1823 - 1891)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

لئوپولد کرونکر
۱۲۰۱-۱۲۶۹

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & ijk = 123, 231, 312 \\ 0 & \text{اگر حداقل دو تا از اندیس‌ها مساوی باشند} \\ -1 & ijk = 132, 213, 321 \end{cases}$$

Tullio Levi-Civita
(1873-1941)

تولیو لوی چیویتا
(۱۲۵۱ - ۱۳۲۰)

دانشگاه خوارزمی

مقدار هریک از عبارت‌های زیر را حساب کنید

$$\sum_{i=1}^{3}\delta_{ii} = ?$$ (جواب: 3)

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{mjk} = ?$$ (جواب: $2\delta_{im}$)

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\epsilon_{ijk} = ?$$ (جواب: 0)

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = ?$$ (جواب: 6)

نشان دهید:

$$\boxed{\sum_{k}\epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\sum_{i=1}^{3}\delta_{ii} = ?$$

$$\sum_{i=1}^{3}\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\epsilon_{ijk} = ?$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\epsilon_{ijk} = \sum_{i=1}^{3}\left(\delta_{i1}\epsilon_{i1k} + \delta_{i2}\epsilon_{i2k} + \delta_{i3}\epsilon_{i3k}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\epsilon_{ijk} = \left(\delta_{11}\cancelto{0}{\epsilon_{11k}} + \cancelto{0}{\delta_{12}}\epsilon_{12k} + \cancelto{0}{\delta_{13}}\epsilon_{13k}\right)$$

$$+\left(\cancelto{0}{\delta_{21}}\epsilon_{21k} + \delta_{22}\cancelto{0}{\epsilon_{22k}} + \cancelto{0}{\delta_{23}}\epsilon_{23k}\right)$$

$$+\left(\cancelto{0}{\delta_{31}}\epsilon_{i1k} + \cancelto{0}{\delta_{32}}\epsilon_{32k} + \delta_{33}\cancelto{0}{\epsilon_{33k}}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\epsilon_{ijk} = 0$$

$$\boldsymbol{A} = A_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + A_y\hat{\boldsymbol{e}}_y + A_z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$= A_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + A_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + A_3\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

$$= \sum_{i=1}^{3} A_i\hat{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_x \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x = \hat{\boldsymbol{e}}_y \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y = \hat{\boldsymbol{e}}_z \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = 1$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_x \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y = \hat{\boldsymbol{e}}_x \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{e}}_y \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = 0$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = \delta_{ij}}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= \left(\sum_{i=1}^{3} A_i \hat{\boldsymbol{e}}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} B_j \hat{\boldsymbol{e}}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_i B_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{3} A_i B_i\end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{\boldsymbol{e}}_k}$$

$$\boxed{\left(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\right)_k = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_i B_j}$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{e}}_i \times \hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{\boldsymbol{e}}_k}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)_k = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\epsilon_{ijk}A_iB_j}$$

$k = 3$

$$\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)_3 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\epsilon_{ij3}A_iB_j = \sum_{i=1}^{3}\left(\epsilon_{i13}A_iB_1 + \epsilon_{i23}A_iB_2 + \overset{0}{\epsilon_{i33}}A_iB_3\right)$$

$$\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)_3 = \left(\overset{0}{\epsilon_{113}}A_1B_1 + \overset{1}{\epsilon_{123}}A_1B_2\right) + \left(\overset{-1}{\epsilon_{213}}A_2B_1 + \overset{0}{\epsilon_{223}}A_2B_2\right) + \left(\overset{0}{\epsilon_{313}}A_3B_1 + \overset{0}{\epsilon_{323}}A_3B_2\right)$$

$$\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)_3 = A_1B_2 - A_2B_1$$

$$\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)_z = A_xB_y - A_yB_x$$

$$
\begin{aligned}
\left[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right]_i &= \sum_j\sum_k \epsilon_{ijk}A_j(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_k = \\
&= \sum_j\sum_k \epsilon_{ijk}A_j\sum_m\sum_l \epsilon_{klm}B_lC_m \\
&= \sum_j\sum_k\sum_m\sum_l \epsilon_{klm}\epsilon_{ijk}A_jB_lC_m
\end{aligned}
$$

از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$
\sum_k \epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right]_i &= \sum_j\sum_m\sum_l \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)A_jB_lC_m \\
&= \sum_j (A_jC_j)B_i - \sum_j (A_jB_j)C_i \\
&= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})B_i - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})C_i
\end{aligned}
$$

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی