

# Fundamentals of Physics II

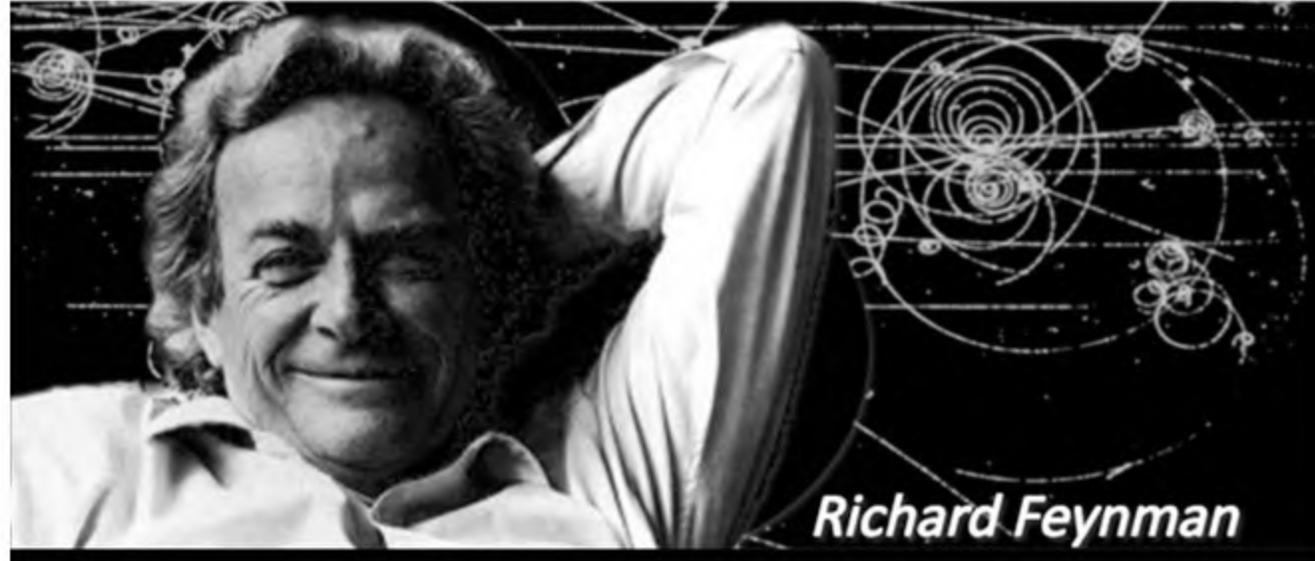
Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی





اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را  
به دست می آورید که تا کنون کسب کرده اید

فاینمن



---

## درس هفتم

### بار الکتریکی - حل چند مسئله

# Electric Charge-Solved Problems

---



بار الکتریکی یک مول پروتون، ثابت فارادی نامیده می‌شود. مقدار عددی آن چه قدر است؟

حل:

منظور از یک مول، تعداد  $N_0 = 6.02 \times 10^{23}$  است که آن را عدد آووگادرو می‌نامیم.

بنابراین بار الکتریکی یک مول پروتون برابر است با

$$q = N_0 e = (6.02 \times 10^{23})(1.6 \times 10^{-19}) = 9.63 \times 10^4 \text{ C}$$

این مقدار بار الکتریکی، با تجمع تعداد بسیار زیادی پروتون حاصل شده است و واضح

است که مقدار بسیار زیادی است.



بار الکتریکی جاری در یک لامپ معمولی برابر با  $1.5 \text{ C/s}$  است. این مقدار بار، معادل چند الکترون در ثانیه است؟

**حل:**

$$q = ne \Rightarrow n = \frac{q}{e} = \frac{1.5 \frac{\text{C}}{\text{s}}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 9.4 \times 10^{18} \frac{\text{تعداد}}{\text{ثانیه}}$$

در این مسئله دقت کنید که  $q$  بر حسب کولن بر ثانیه نوشته شده است (یعنی در حقیقت جریان الکتریکی است). پس نتیجه‌ی به دست آمده، آهنگ شارش الکترون‌ها، یا به بیان دیگر، تعداد الکترون‌ها در واحد زمان را نشان می‌دهد.



چه مقدار بار منفی و چه مقدار بار مثبت، در یک لیوان آب (۲۵۰ گرم) موجود است؟

**حل:** لازم است تعداد اتم‌ها را در ۲۵۰ گرم آب حساب کنیم. می‌دانیم که جرم مولکولی آب، یعنی جرم یک مول از

مولکول‌های آب، برابر با  $M=18$  g/m است. بنابراین جرم یک مولکول آب برابر است با:

$$m_0 = \frac{M}{N_0} = \frac{18}{6.02 \times 10^{23}} \text{ g}$$

اگر تعداد مولکول‌های آب را در ۲۵۰ گرم آب،  $N$  بنامیم، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$m = Nm_0 = \frac{NM}{N_0} \Rightarrow N = \frac{N_0 m}{M} = \frac{(250)(6.02 \times 10^{23})}{18} = 83.6 \times 10^{23}$$

عدد فوق، تعداد مولکول‌ها را در ۲۵۰ گرم آب نشان می‌دهد



می‌دانیم که هر مولکول آب از دو اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن درست شده است. هر اتم هیدروژن یک الکترون و هر اتم اکسیژن هشت الکترون دارند. بنابراین هر مولکول آب شامل ده الکترون و معادل آن پروتون است. بار هر الکترون  $(-e)$  است، پس مقدار بار منفی در  $250$  گرم آب برابر است با:

$$q = (10)(-e)N = (83.6 \times 10^{23})(10)(-1.6 \times 10^{-19}) = -13.4 \times 10^6 \text{ C}$$

البته همین مقدار بار مثبت نیز در یک لیوان آب وجود دارد.



کل بار هر يك از توزيع بارهای زیر را تعیین کنید

(الف) بار خطی  $\lambda_0$  به طور یکنواخت بر روی حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع  $a$  توزیع شده است.

(ب) بار سطحی  $\sigma_0$  به طور یکنواخت بر سطح قرص دایره‌ای به شعاع  $R$  توزیع شده است.

(ج) بار حجمی  $\rho_0$  به طور یکنواخت درون حجم کره‌ای به شعاع  $R$  توزیع شده است.

(د) بار خطی بر روی محور  $z$  با چگالی  $\lambda = \frac{\lambda_0}{1 + \frac{z^2}{a^2}}$  توزیع شده است.

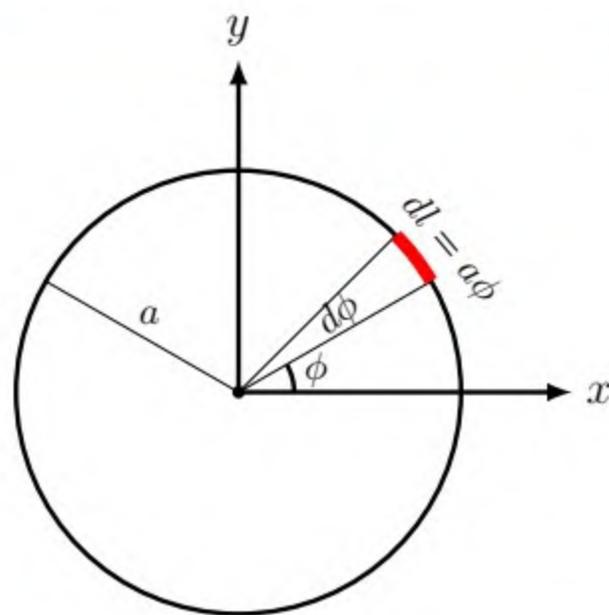


الف) بار خطی  $\lambda_0$  به طور یکنواخت بر روی حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع  $a$  توزیع شده است.

**روش اول:** چون چگالی خطی بار الکتریکی ثابت است، می‌توان نوشت:

$$\lambda_0 = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2\pi a} \Rightarrow Q = \lambda_0 2\pi a$$

**روش دوم:** می‌توان با انتخاب یک عنصر طول و انتگرال‌گیری، مسئله را حل کرد:



$$Q = \int dq = \int \lambda_0 dl$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \lambda_0 a d\phi = \lambda_0 a \int_0^{2\pi} d\phi = \lambda_0 a 2\pi$$

(ب) بار سطحی  $\sigma_0$  به طور یکنواخت بر سطح قرص دایره‌ای به شعاع  $R$  توزیع شده است.

**روش اول:** چون چگالی سطحی بار الکتریکی ثابت است، می‌توان نوشت:

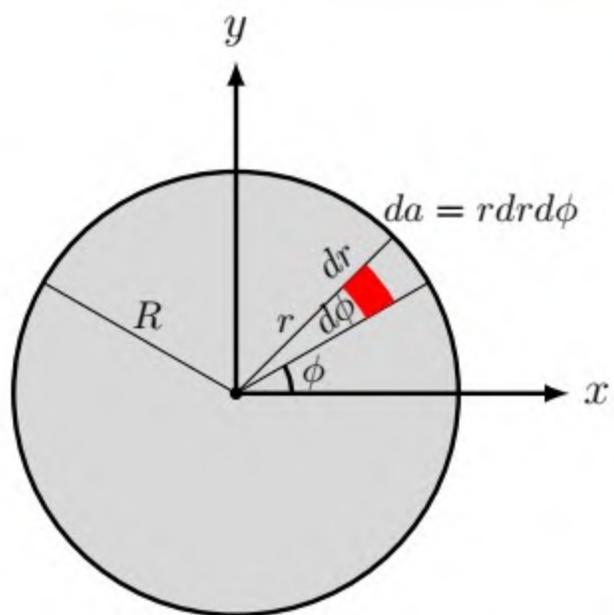
$$\sigma_0 = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2} \Rightarrow Q = \sigma_0 \pi R^2$$

**روش دوم:** می‌توان با انتخاب یک عنصر سطح و انتگرال‌گیری، مسئله را حل کرد:

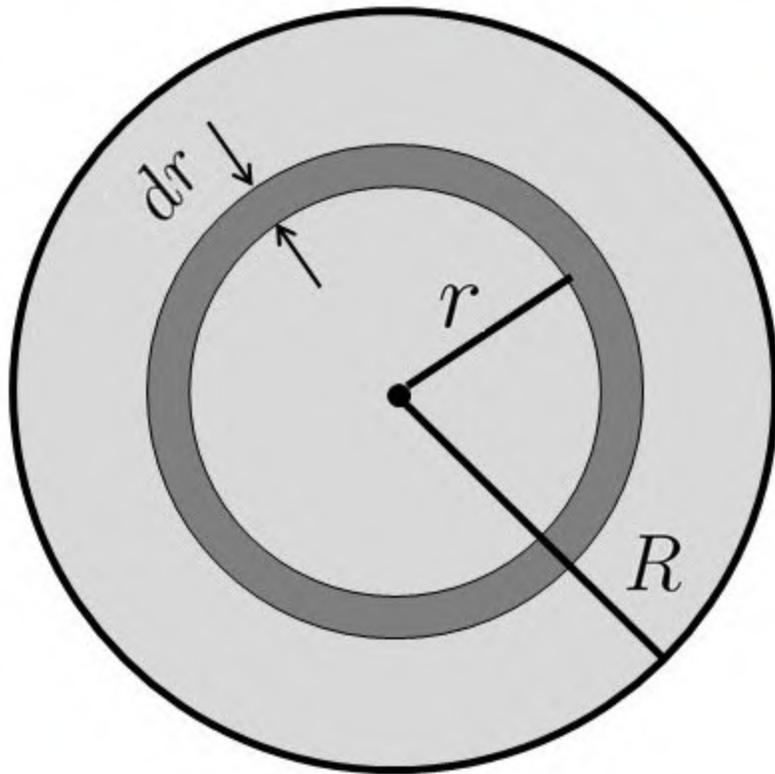
$$Q = \int dq = \int \sigma_0 da$$

$$Q = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \sigma_0 r dr d\phi = \sigma_0 \int_{\phi=0}^{2\pi} \left\{ \int_{r=0}^R r dr \right\} d\phi$$

$$Q = \sigma_0 \int_{\phi=0}^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R \right\} d\phi = \sigma_0 \frac{1}{2} R^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = \sigma_0 \pi R^2$$



**نکته:** گاهی با توجه به تقارن مسئله می‌توان عنصر سطح را به گونه‌ای انتخاب کرد که از انتگرال‌گیری دوگانه اجتناب شود. مثلاً در این مسئله چون چگالی بار الکتریکی به  $\phi$  بستگی ندارد. می‌توان عنصر سطح را به شکل حلقه‌ای به شعاع  $r$  و ضخامت  $dr$  در نظر گرفت. در این صورت مساحت این عنصر سطح برابر است با  $da = 2\pi r dr$



$$Q = \int_{r=0}^R \sigma_0 2\pi r dr = \sigma_0 2\pi \left( \frac{1}{2} R^2 \right) = \sigma_0 \pi R^2$$

(ج) بار سطحی  $\rho_0$  به طور یکنواخت درون حجم کره‌ای به شعاع  $R$  توزیع شده است.

**روش اول:** چون چگالی حجمی بار الکتریکی ثابت است، می‌توان نوشت:

$$\rho_0 = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow Q = \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3$$

**روش دوم:** می‌توان با انتخاب یک عنصر حجم و انتگرال‌گیری، مسئله را حل کرد:

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$Q = \int \rho_0 dv = \rho_0 \int \int \int r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$Q = \rho_0 \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \rho_0 4\pi \int_0^R r^2 dr = \rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3$$



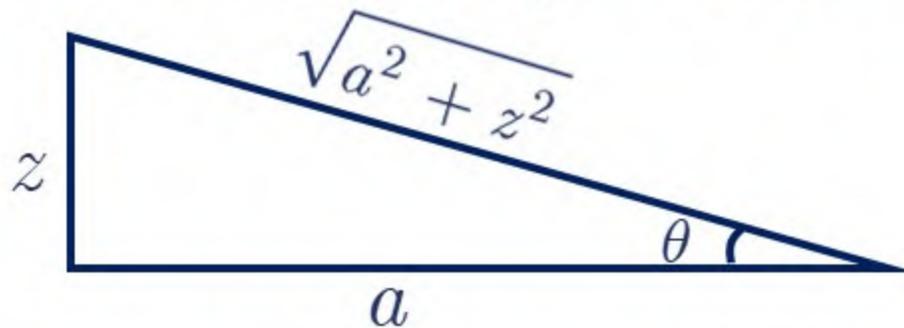
(د) بار خطی بر روی محور  $z$  با چگالی  $\lambda = \frac{\lambda_0}{1 + \frac{z^2}{a^2}}$  توزیع شده است.

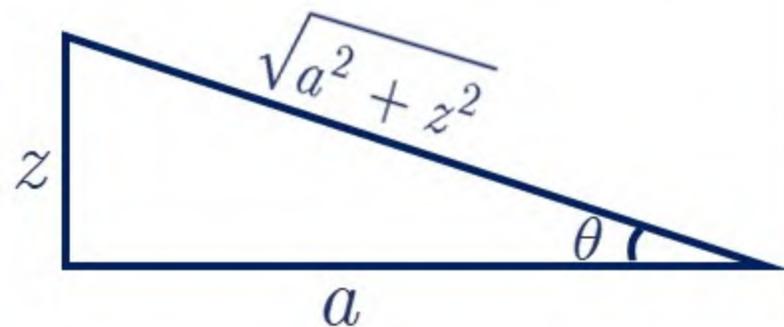
در این جا چگالی بار الکتریکی یکنواخت نیست،

$$dq = \lambda dz = \frac{\lambda_0}{1 + \frac{z^2}{a^2}} dz$$

$$Q = \int dq = \lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{a^2}} dz$$

برای محاسبه‌ی چنین انتگرال‌هایی تغییر متغیر  $z = a \tan \theta$  را به کار می‌بریم. یعنی در واقع مثلثی قائم‌الزاویه در نظر می‌گیریم که دو ضلع قائم آن  $a$  و  $z$  باشند به گونه‌ای که ضلع  $z$  روبروی زاویه‌ی  $\theta$  باشد.





$$\theta = \tan^{-1} \frac{z}{a} \Rightarrow \begin{cases} z = +\infty \Rightarrow \theta = +\frac{\pi}{2} \\ z = -\infty \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z &= a \tan \theta \\ dz &= a (1 + \tan^2 \theta) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{a^2}} dz = \lambda_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{a (1 + \tan^2 \theta) d\theta}{1 + \tan^2 \theta} \\ &= \lambda_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a d\theta = \lambda_0 a \left[ +\frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= \lambda_0 a \pi \end{aligned}$$



# شاد و مهربان باشید

---

