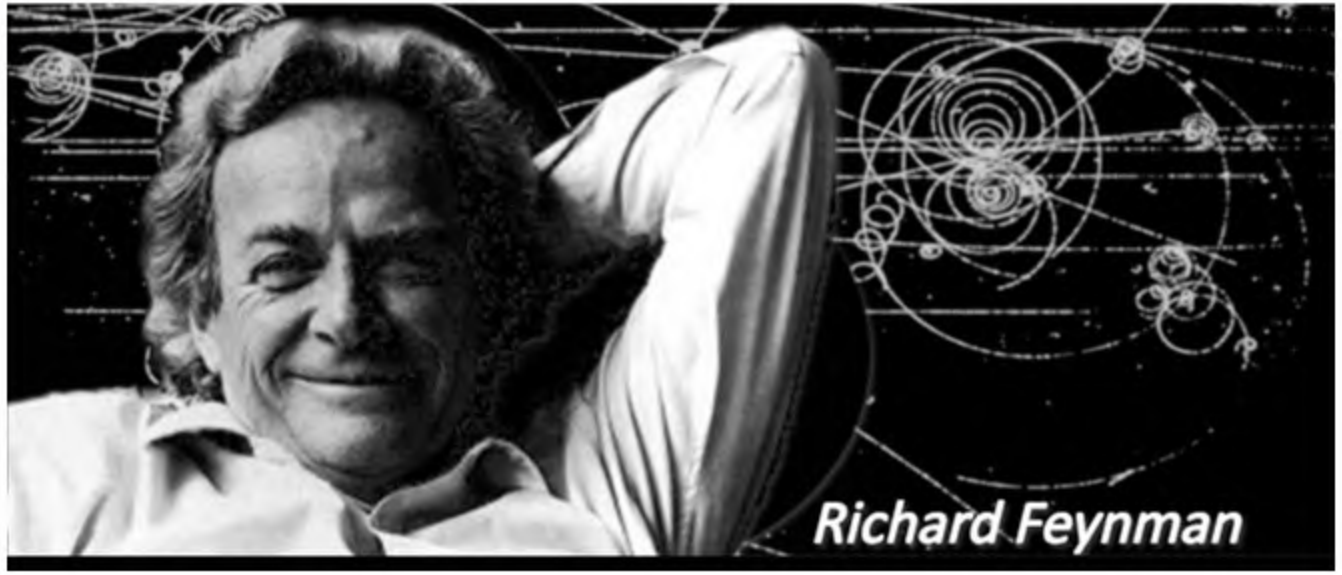
Fundamentals of Physics II

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس نهم

قانون کولن- حل مسئله

Coulomb's Law-Solved Problems

دانشگاه خوارزمی

دو کره‌یِ فلزیِ کوچک را در نظر بگیرید که مرکز آن‌ها از یکدیگر 3cm فاصله دارند. چند الکترونِ اضافی بر روی هر یک از این دو کره قرار گیرد تا نیروی دافعه‌ی وارد بر هر یک از آن‌ها برابر با 10^{-19}N شود؟

حل: کره‌ها را چون بارهای نقطه‌ای در نظر می‌گیریم که بارِ هر یک از آن‌ها q است. در این صورت نیروی دافعه‌ای که به یک‌دیگر وارد می‌کنند برابر است با

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow q = \pm\sqrt{4\pi\epsilon_0 r^2 F}$$

چون بارِ کره‌ها ناشی از تعدادی الکترونِ اضافی بر آن‌هاست، بنابر این بارِ آن‌ها منفی است و در معادله‌ی فوق علامتِ منفی را می‌پذیریم

$$q = -\sqrt{4\pi\epsilon_0 r^2 F}$$

دانشگاه خوارزمی

$$q = -\sqrt{\frac{1}{9\times10^{9}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}}(3\times10^{-2}\mathrm{m})^2(10^{-19}\mathrm{N})} = -10^{-16}\mathrm{C}$$

و تعدادِ الکترون‌های اضافی بر رویِ هر یک از کره‌ها برابر است با

$$N = \frac{|\,q\,|}{e} = \frac{10^{-16}\mathrm{C}}{1.6\times10^{-19}\mathrm{C}} = 625$$

دو گلوله‌یِ کرویِ سربی مشابه با شعاعِ $R=1\text{cm}$ در نظر بگیرید. این دو گلوله در خلأ قرار دارند و فاصله‌یِ مراکز آن‌ها از هم $d=1\text{m}$ است. اگر از هر یک از اتم‌هایِ یکی از این گلوله‌ها یک الکترون برداریم و همه‌یِ آن‌ها را به گلوله‌یِ دوم بدهیم، این دو گلوله چه نیرویِ الکتریکی به هم وارد می‌کنند؟ چگالیِ سرب $\rho_m=11.3\text{g/cm}^3$ و عددِ اتمیِ آن $A=207$ است.

حل:

پیش از هر چیز توجه می‌کنیم که شعاعِ گلوله‌ها نسبت به فاصله‌ی آن‌ها کوچک است. پس گلوله‌ها را چون نقاطی در نظر می‌گیریم و قانونِ کولن را برای دو بارِ نقطه‌ای به کار می‌بریم

اگر تعدادِ اتم‌های هر گلوله N باشد، آن‌گاه بارِ الکتریکیِ گلوله‌ی اول $q_1=+Ne$ و بارِ الکتریکیِ گلوله‌ی دوم $q_2=-Ne$ خواهد بود. بنابر این نیروی بینِ این دو بار برابر است با

$$|\boldsymbol{F}| = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{N^2e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$N = \frac{m}{M}N_0 = \frac{\rho_m(\frac{4\pi}{3})R^3}{M}N_0$$

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{F}| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\left(\rho_m(\frac{4\pi}{3})R^3\right)^2 N_0^2 e^2}{M^2} \\
&= \frac{8.99\times10^9\,\mathrm{Nm^2C^2}}{1\mathrm{m}^2}\frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2(10^{-2}\mathrm{m})^6(11.3\times10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3})^2}{\left(207\times10^{-3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}\right)^2}\times(6.02\times10^{23}\mathrm{mol}^{-1})^2(1.6\times10^{-19}\mathrm{C})^2(6.02\times10^{23}\mathrm{mol}^{-1})^2(1.6\times10^{-19}\mathrm{C})^2 n \\
&= 4.36\times10^{13}\mathrm{N}
\end{aligned}$$

دو گلوله‌ی کوچکِ باردار در خلأ به فاصله‌ی $d=1\text{m}$ از یکدیگر قرار دارند. این دو گلوله نیروی دافعه‌ای به اندازه‌ی $F=1\text{N}$ به هم وارد می‌کنند. اگر Q حاصلِ جمعِ جبریِ این دو بارِ الکتریکی باشد، با فرضِ این که $|Q|=5\times10^{-5}\text{C}$ بارِ هر یک از گلوله‌ها را پیدا کنید.

حل:

$$|\boldsymbol{F}| = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 d^2} \Rightarrow |q_1||q_2| = F4\pi\epsilon_0 d^2$$

$$Q = q_1 + q_2$$

اما با توجه به این که نیروی بینِ دو گلوله دافعه است، نتیجه می‌گیریم که گلوله‌ها دارای بارهایِ الکتریکی هم‌نام هستند. پس می‌توان نوشت:

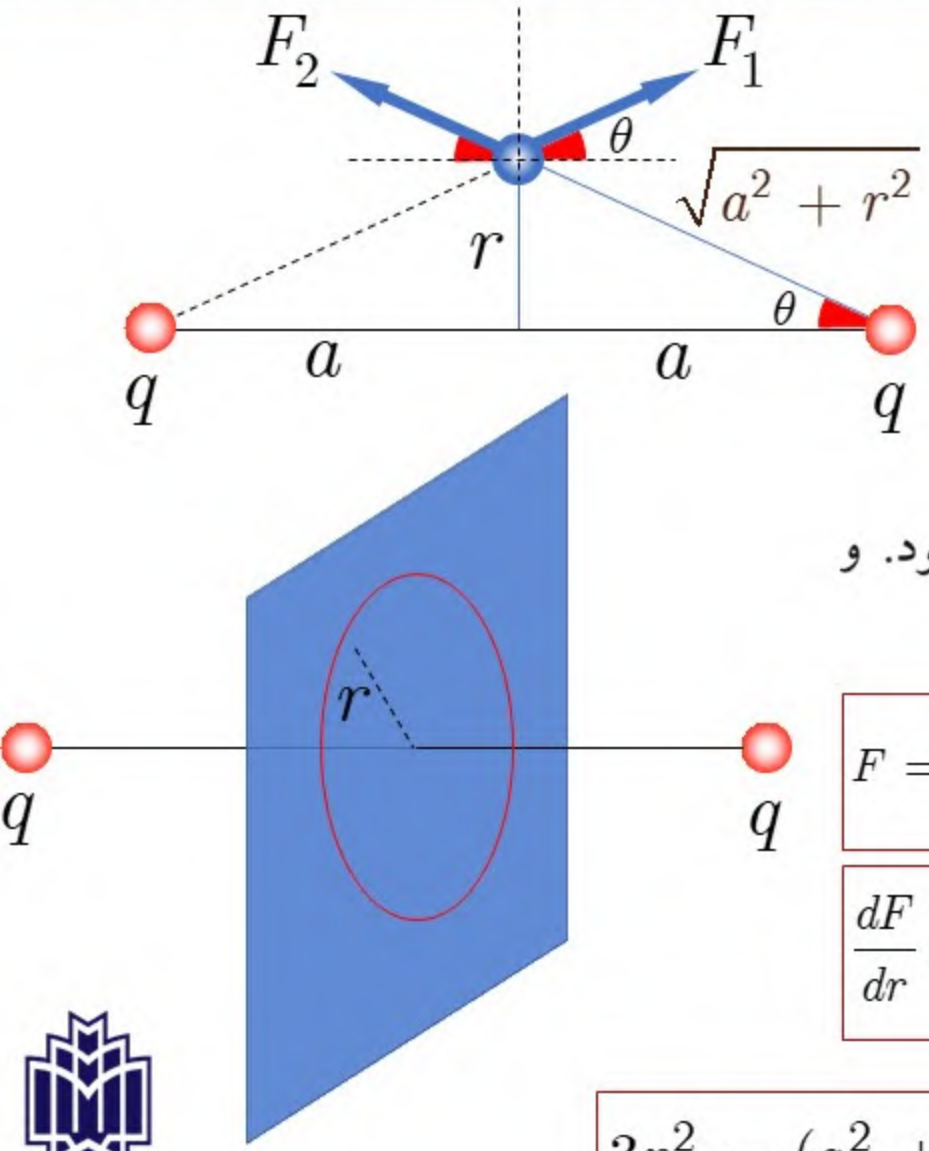
$$|Q| = |q_1 + q_2| = |q_1| + |q_2| = 5\times10^{-5}$$

از این دو معادله، دو مجهول q_1 و q_2 به دست می آید

$$|q_{1,2}| = \frac{1}{2}\left\{|Q| \pm \sqrt{|Q|^2 - 16\pi\epsilon_0 F d^2}\right\}$$

$$|q_1| = 3.84\times10^{-5}\text{C}, \qquad |q_2| = 1.16\times10^{-5}\text{C}$$

چند مثال ساده



دو بار نقطه‌ای مثبت q و هم‌اندازه به فاصله‌ی $2a$ از هم قرار دارند. بر روی صفحه‌ی عمود منصف خط واصل دو بار، شعاع دایره‌ای را تعیین کنید که نیروی وارد بر یک بار آزمون مثبت Q واقع بر محیط آن دایره بیشینه باشد.

طبق قانون کولن و با توجه به شکل می‌توان نوشت

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{(a^2+r^2)}$$

با توجه به تقارن واضح است که برآیند این بردارها در راستای افقی برابر با صفر خواهد بود. و در راستای عمود بر خط واصل این دو بار برابر خواهد بود با:

$$F = 2F_1\sin\theta = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{(a^2+r^2)}\frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}}$$

$$\frac{dF}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{1}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3r^2}{(a^2+r^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

$$\frac{1}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\left(1 - \frac{3r^2}{(a^2+r^2)}\right) = 0$$

$$3r^2 = (a^2+r^2) \Rightarrow 2r^2 = a^2$$

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

دانشگاه خوارزمی

Sample Problem 21.02 Equilibrium of two forces on a particle

Figure 21-8*a* shows two particles fixed in place: a particle of charge $q_1 = +8q$ at the origin and a particle of charge $q_2 = -2q$ at $x = L$. At what point (other than infinitely far away) can a proton be placed so that it is in *equilibrium* (the net force on it is zero)? Is that equilibrium *stable* or *unstable*? (That is, if the proton is displaced, do the forces drive it back to the point of equilibrium or drive it farther away?)

KEY IDEA

If $\vec{F}_1$ is the force on the proton due to charge q_1 and $\vec{F}_2$ is the force on the proton due to charge q_2, then the point we seek is where $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. Thus,

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \tag{21-8}$$

This tells us that at the point we seek, the forces acting on the proton due to the other two particles must be of equal magnitudes,

$$F_1 = F_2, \tag{21-9}$$

and that the forces must have opposite directions.

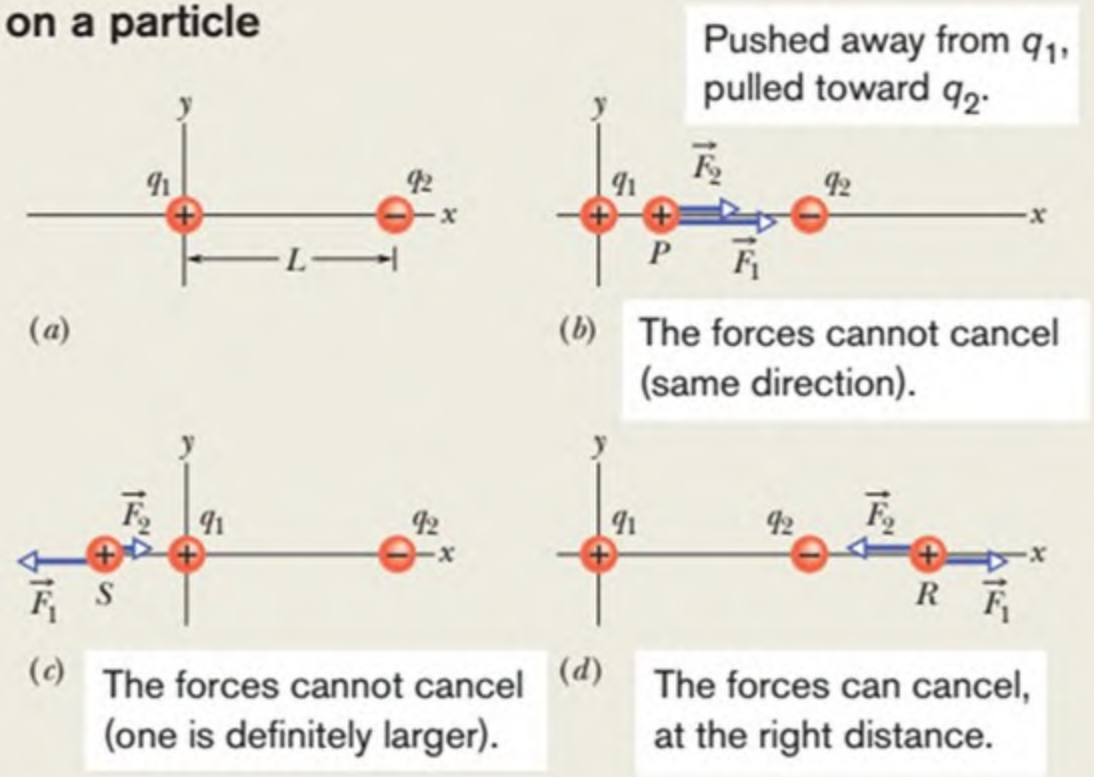


Figure 21-8 (*a*) Two particles of charges q_1 and q_2 are fixed in place on an x axis, with separation L. (*b*)–(*d*) Three possible locations P, S, and R for a proton. At each location, $\vec{F}_1$ is the force on the proton from particle 1 and $\vec{F}_2$ is the force on the proton from particle 2.

Reasoning: Because a proton has a positive charge, the proton and the particle of charge q_1 are of the same sign, and force $\vec{F}_1$ on the proton must point away from q_1. Also, the proton and the particle of charge q_2 are of opposite signs, so force $\vec{F}_2$ on the proton must point toward q_2. "Away from q_1" and "toward q_2" can be in opposite directions only if the proton is located on the x axis.

If the proton is on the x axis at any point between q_1 and q_2, such as point P in Fig. 21-8b, then $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$ are in the same direction and not in opposite directions as required. If the proton is at any point on the x axis to the left of q_1, such as point S in Fig. 21-8c, then $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$ are in opposite directions. However, Eq. 21-4 tells us that $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$ cannot have equal magnitudes there: F_1 must be greater than F_2, because F_1 is produced by a closer charge (with lesser r) of greater magnitude ($8q$ versus $2q$).

Finally, if the proton is at any point on the x axis to the right of q_2, such as point R in Fig. 21-8d, then $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$ are again in opposite directions. However, because now the charge of greater magnitude (q_1) is *farther* away from the proton than the charge of lesser magnitude, there is a point at which F_1 is equal to F_2. Let x be the coordinate of this point, and let q_p be the charge of the proton.

Calculations: With Eq. 21-4, we can now rewrite Eq. 21-9:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8qq_p}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qq_p}{(x-L)^2}. \qquad (21\text{-}10)$$

(Note that only the charge magnitudes appear in Eq. 21-10. We already decided about the directions of the forces in drawing Fig. 21-8d and do not want to include any positive or negative signs here.) Rearranging Eq. 21-10 gives us

$$\left(\frac{x-L}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

After taking the square roots of both sides, we find

$$\frac{x-L}{x} = \frac{1}{2}$$

and

$$x = 2L. \qquad \text{(Answer)}$$

The equilibrium at $x = 2L$ is unstable; that is, if the proton is displaced leftward from point R, then F_1 and F_2 both increase but F_2 increases more (because q_2 is closer than q_1), and a net force will drive the proton farther leftward. If the proton is displaced rightward, both F_1 and F_2 decrease but F_2 decreases more, and a net force will then drive the proton farther rightward. In a stable equilibrium, if the proton is displaced slightly, it returns to the equilibrium position.

مثال

گلوله‌ی کوچکی با بار الکتریکی $q_۱ = ۲\mu C$ در نقطه‌ی $(۲,۳)$ بر حسب متر و بار الکتریکی دیگری $q_۲ = -۳\mu C$ در نقطه‌ی $(۴,-۲)$ بر حسب متر قرار دارند. چه نیرویی از طرف بار نخست به بار دوم وارد می شود؟

$\vec{r}_۱ = ۲\hat{i} + ۳\hat{j}$ بردار مکان بار نخست

$\vec{r}_۲ = ۴\hat{i} - ۲\hat{j}$ بردار مکان بار دوم

$\vec{r}_۲ - \vec{r}_۱ = ۲\hat{i} - ۵\hat{j}$ $\qquad |\vec{r}_۲ - \vec{r}_۱| = \sqrt{۲۹}$ $\qquad \vec{F}_{q_۲} = \frac{q_۱ q_۲}{۴\pi\epsilon_۰} \frac{\vec{r}_۲ - \vec{r}_۱}{|\vec{r}_۲ - \vec{r}_۱|^۳}$

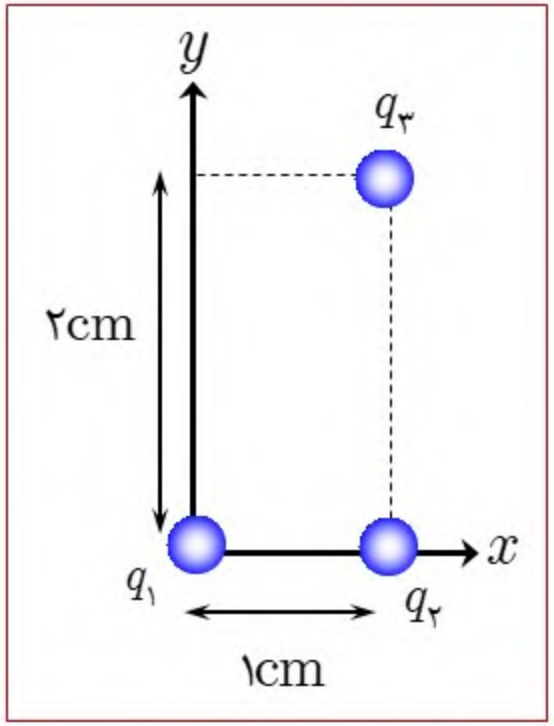
$$F_{q_۲} = \left(۹ \times ۱۰^۹ \frac{\mathrm{N-m^۲}}{\mathrm{C^۲}}\right) \frac{(۲ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{C})(-۳ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{C})}{(۲۹)^{\frac{۳}{۲}}} (۲\hat{i} - ۵\hat{j})$$

$$= (-۶/۹ \times ۱۰^{-۴})\hat{i} + (۱/۷ \times ۱۰^{-۳})\ \hat{j} \qquad \mathrm{N}$$

دانشگاه خوارزمی

مثال

در شکل زیر چه نیرویی به بار $q_۱$ وارد می‌شود؟



$$q_۱ = ۱\text{nC}$$

$$q_۲ = ۱\text{nC}$$

$$q_۳ = -۲\text{nC}$$

$$\vec{r}_۱ = ۰$$

$$\vec{r}_۲ = (۱۰^{-۲}\ \text{m})\hat{i}$$

$$\vec{r}_۳ = (۱۰^{-۲}\ \text{m})\hat{i} + (۲ \times ۱۰^{-۲}\ \text{m})\hat{j}$$

$$\vec{r}_۱ - \vec{r}_۲ = (-۱۰^{-۲}\text{m})\hat{i}$$

$$\vec{r}_۱ - \vec{r}_۳ = (-۱۰^{-۲}\text{m})\hat{i} + (-۲ \times ۱۰^{-۲}\text{m})\hat{j}$$

$$|\vec{r}_۱ - \vec{r}_۲| = ۱۰^{-۲}\text{m}$$

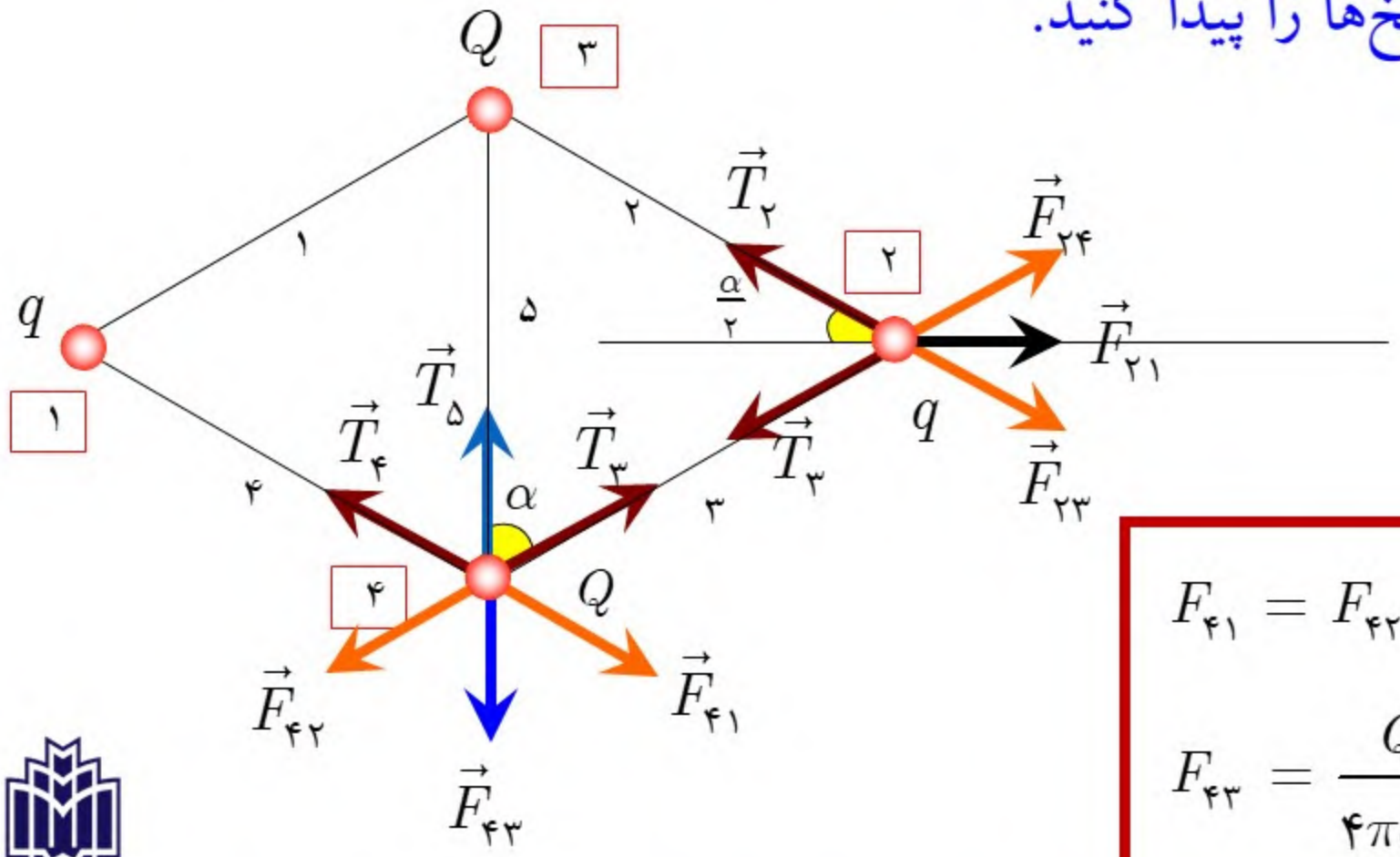
$$|\vec{r}_۱ - \vec{r}_۳| = \sqrt{۵} \times ۱۰^{-۲}\text{m}$$

$$\boxed{\vec{F}_{q_۱} = \frac{q_۱ q_۲}{۴\pi\epsilon_۰} \frac{\vec{r}_۱ - \vec{r}_۲}{|\vec{r}_۱ - \vec{r}_۲|^۳} + \frac{q_۱ q_۳}{۴\pi\epsilon_۰} \frac{\vec{r}_۱ - \vec{r}_۳}{|\vec{r}_۱ - \vec{r}_۳|^۳}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{q_۱} = -\left(۰/۸۲۱ \times ۱۰^{-۴}\text{N}\right)\ \hat{i} + \left(۰/۳۵۸ \times ۱۰^{-۴}\text{N}\right)\ \hat{j}}$$

دانشگاه خوارزمی

چهار بار الکتریکی $+q, +Q, +q, +Q$ توسط پنج نخ سبک به طول یکسان L مطابق شکل به هم وصل شده‌اند. کشش هریک از نخ‌ها را پیدا کنید.



$$\boxed{T_۱ = T_۴ = T_۲ = T_۳}$$

$$F_{۴۱} = F_{۴۲} = F_{۲۳} = F_{۲۴} = \frac{qQ}{۴\pi\epsilon_\circ L^۲}$$

$$F_{۴۳} = \frac{Q^۲}{۴\pi\epsilon_\circ L^۲}, \qquad F_{۲۱} = \frac{q^۲}{۴\pi\epsilon_\circ \left(۲L\cos\frac{\alpha}{۲}\right)^۲}$$

مثال

$$۲F_{۲۴}\cos\frac{\alpha}{۲} + F_{۲۱} = ۲T_{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$$

$$T_{۲} = T_{۳} = \frac{q}{۴\pi\epsilon_{\circ}L^{۲}}\left(Q + \frac{q}{۸\cos^{۳}\frac{\alpha}{۲}}\right)$$

$$T_{۱} = T_{۲} = T_{۳} = T_{۴} = \frac{q}{۴\pi\epsilon_{\circ}L^{۲}}\left(Q + \frac{q}{۸\cos^{۳}\frac{\alpha}{۲}}\right)$$

$$T_{۱} = T_{۲} = T_{۳} = T_{۴} = \frac{q}{۴\pi\epsilon_{\circ}L^{۲}}\left(Q + \frac{q}{۳\sqrt{۳}}\right)$$

$$F_{۴۳} + ۲F_{۴۱}\cos\alpha = T_{۵} + ۲T_{۳}\cos\alpha$$

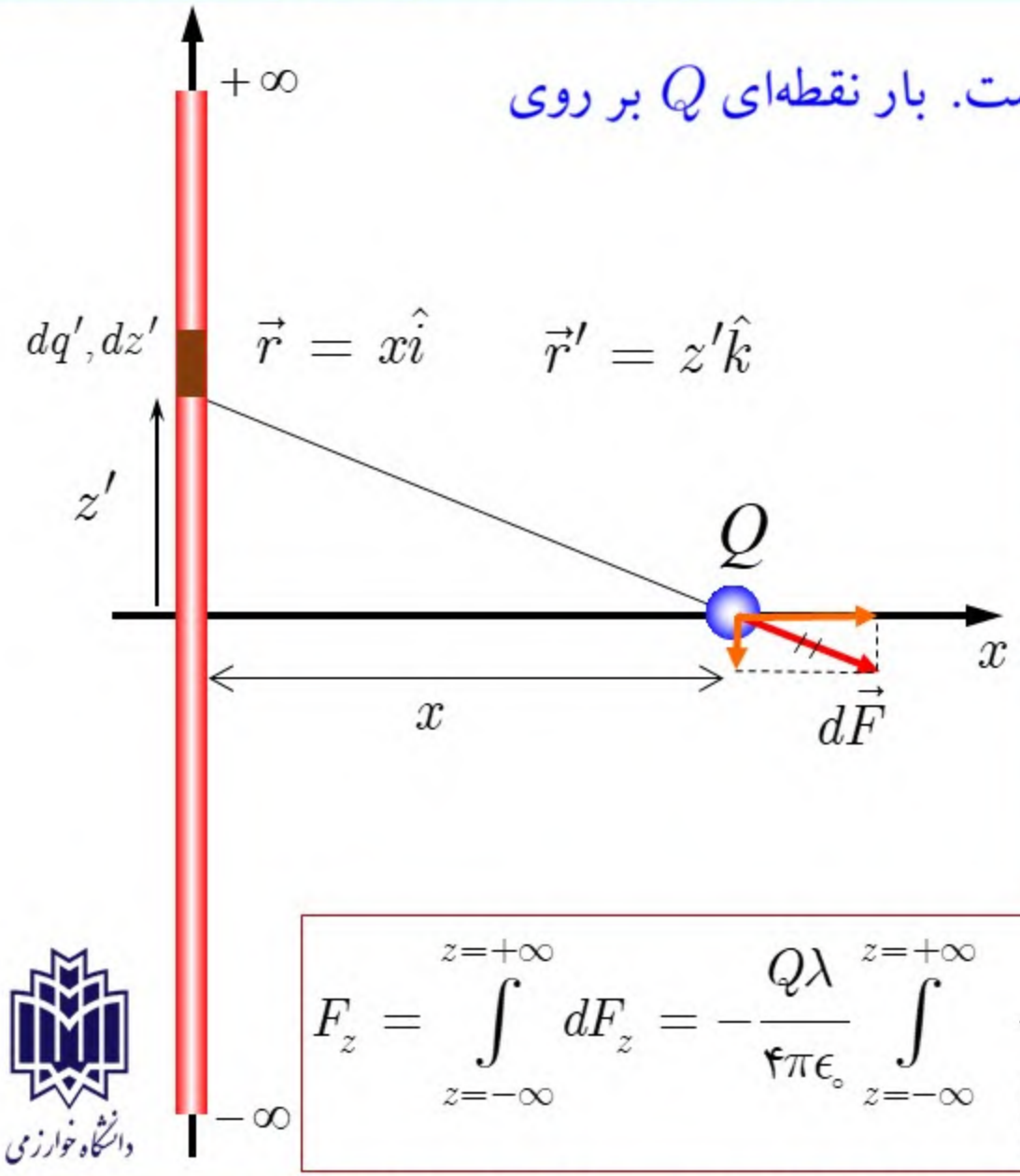
$$\frac{Q^{۲}}{۴\pi\epsilon_{\circ}L^{۲}} + ۲\frac{qQ}{۴\pi\epsilon_{\circ}L^{۲}}\cos\alpha = T_{۵} + ۲\frac{q}{۴\pi\epsilon_{\circ}L^{۲}}\left(Q + \frac{q}{۸\cos^{۳}\frac{\alpha}{۲}}\right)\cos\alpha$$

$$T_5 = \frac{1}{4\pi\epsilon_{\circ}L^2}\left(Q^2 - \frac{q^2}{3\sqrt{3}}\right)$$

دانشگاه خوارزمی

مثال

بار الکتریکی با چگالی λ به طور یکنواخت بر محور z توزیع شده است. بار نقطه‌ای Q بر روی محور x واقع است. چه نیرویی به بار Q وارد می‌شود؟



$$d\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq'\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

$$d\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, dz'\left(x\hat{i}-z'\hat{k}\right)}{\left(x^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dF_z = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, dz'\, z'}{\left(x^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dF_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, dz'\, x}{\left(x^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_z = \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} dF_z = -\frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{z=-\infty}^{z=+\infty}\frac{dz'\, z'}{\left(x^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$F_x = \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} dF_x = \frac{Q\lambda x}{4\pi\epsilon_0}\int_{z=-\infty}^{z=+\infty}\frac{dz'}{\left(x^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

دانشگاه خوارزمی

مثال

$$F_x = \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} dF_x = \frac{Q\lambda x}{۴\pi\epsilon_\circ}\int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \frac{dz'}{\left(x^۲ + z'^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$\begin{cases} z' = x\tan\theta \\ -\frac{\pi}{۲} \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$F_x = \frac{Q\lambda x}{۴\pi\epsilon_\circ}\int_{\theta=-\frac{\pi}{۲}}^{\theta=+\frac{\pi}{۲}} \frac{x\left(۱+\tan^۲\theta\right)d\theta}{x^۳\left(۱+\tan^۲\theta\right)^{\frac{۳}{۲}}} = \int_{\theta=-\frac{\pi}{۲}}^{\theta=+\frac{\pi}{۲}} \frac{d\theta}{\left(۱+\tan^۲\theta\right)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$F_x = \frac{Q\lambda}{۴\pi\epsilon_\circ x}\int_{\theta=-\frac{\pi}{۲}}^{\theta=+\frac{\pi}{۲}} \cos\theta \; d\theta$$

دانشگاه خوارزمی

مثال

$$F_x = \frac{Q\lambda}{۴\pi\epsilon_\circ x}\int_{\theta=-\frac{\pi}{۲}}^{\theta=+\frac{\pi}{۲}} \cos\theta \; d\theta = \frac{Q\lambda}{۴\pi\epsilon_\circ x}\Big[\sin\,\theta\Big]_{-\frac{\pi}{۲}}^{+\frac{\pi}{۲}}$$

$$F_x = \frac{Q\lambda x}{۴\pi\epsilon_\circ x^۲}\left[\sin\frac{\pi}{۲} - \sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{Q\lambda}{۲\pi\epsilon_\circ x}\,\hat{i}}$$

شاد و مهربان باشید