

Electromagnetism I

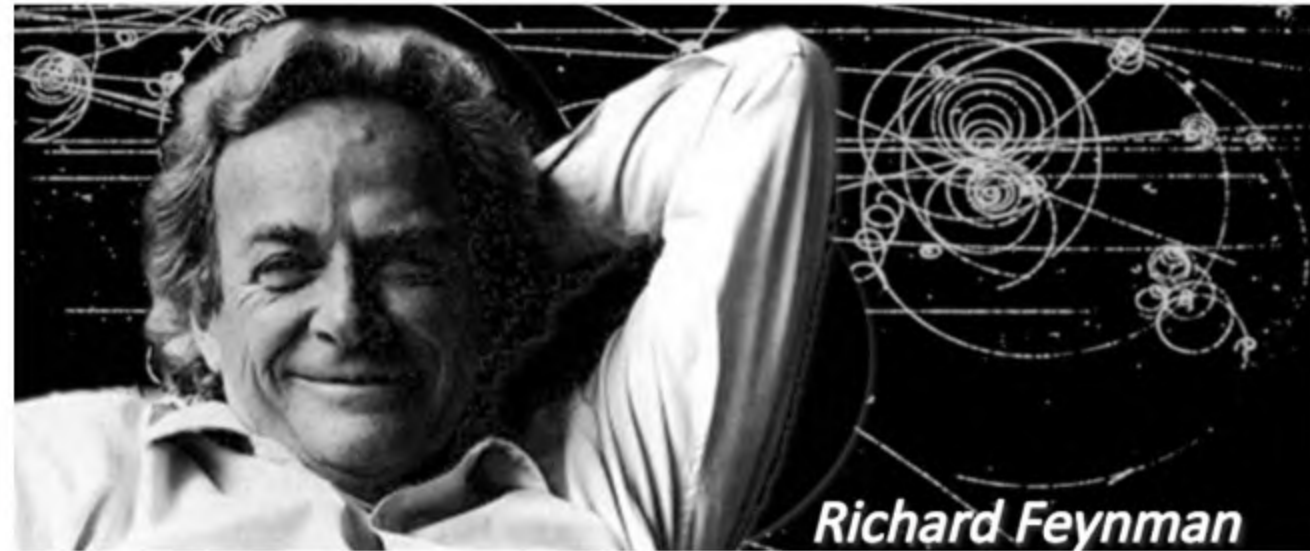
Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی





اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را
به دست می آورید که تا کنون کسب کرده اید

فاینمن

درس دوم

اسکالر، بردار و تانسور

Scalar, Vector and Tensor



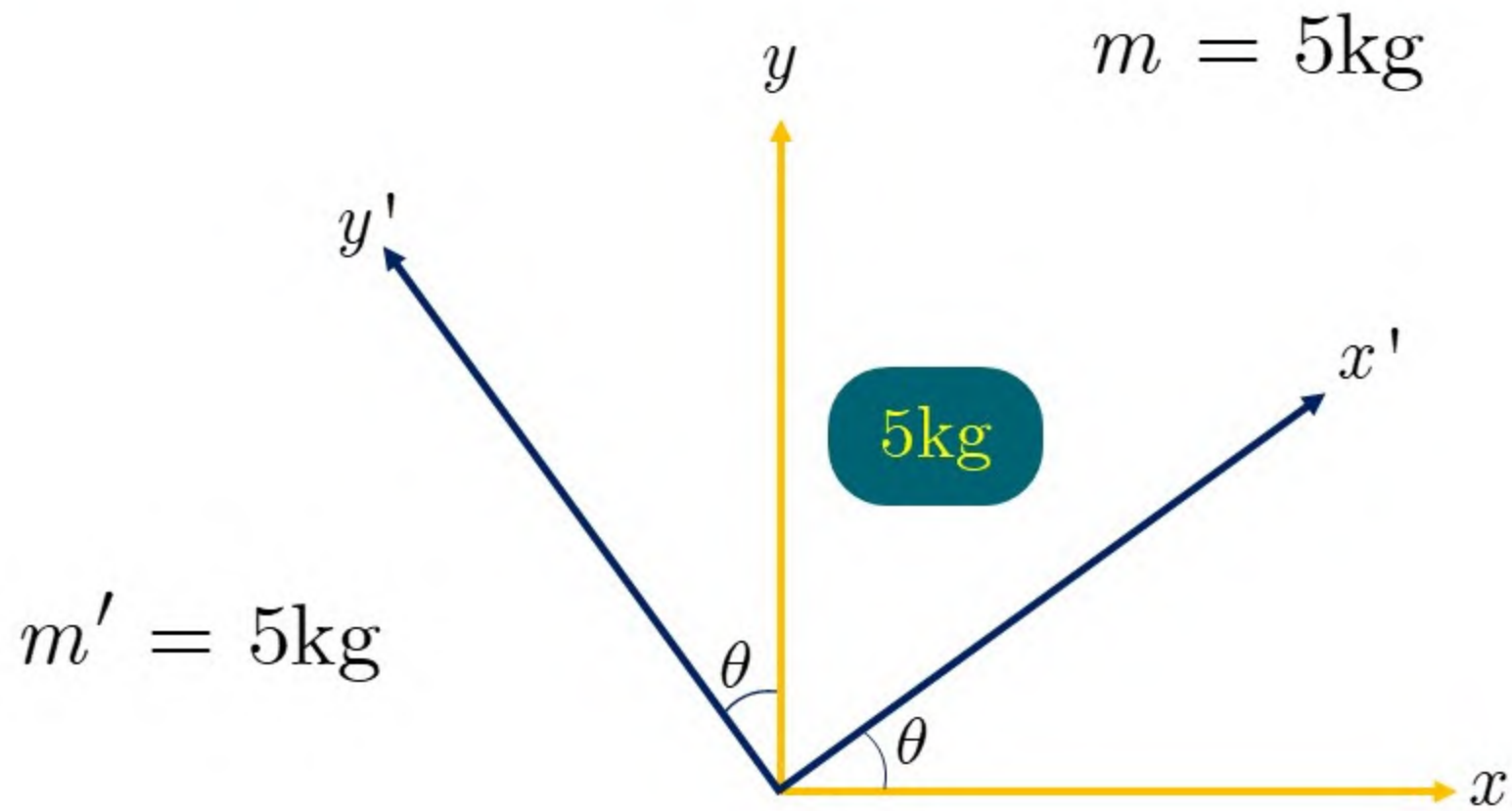
لطفا پیش از شروع این درس،

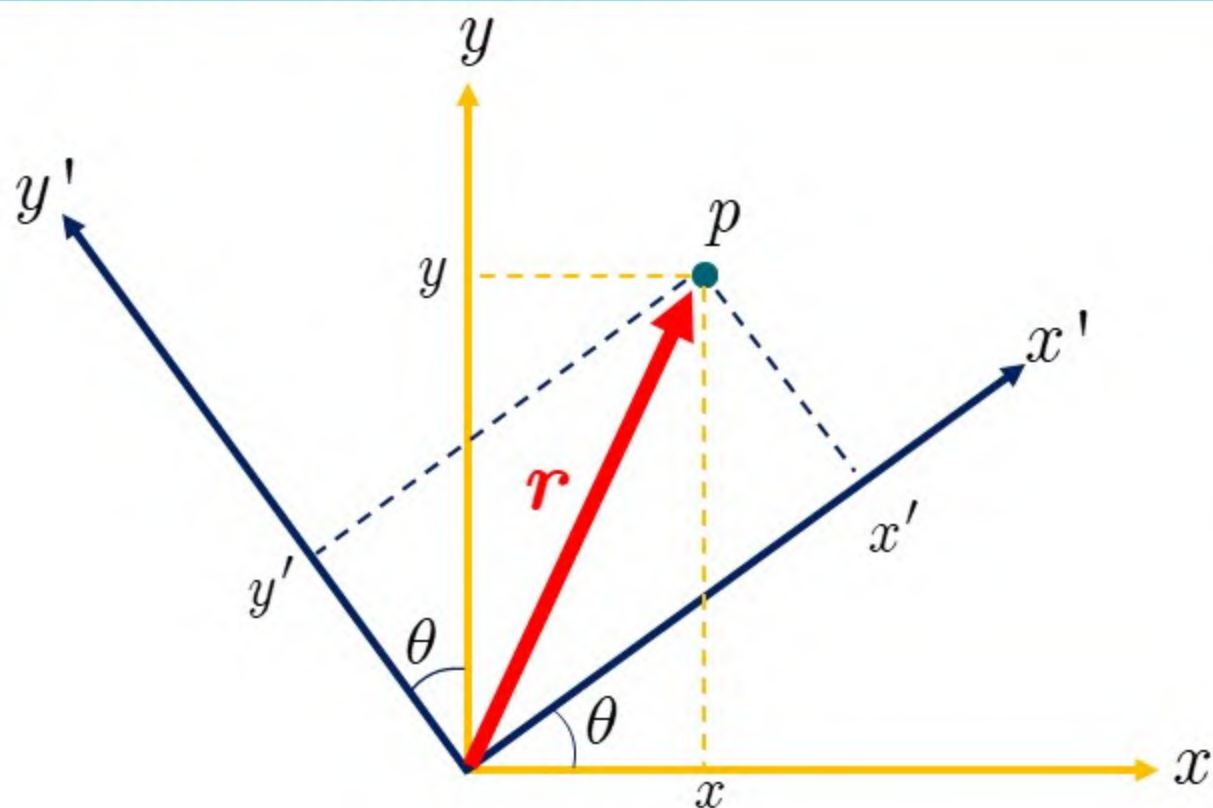
درس نامه‌های ۱ و ۲ و ۳ درس فیزیک پایه ۲

اینجانب را مطالعه کنید

<https://homepage.kanjouri.com>







$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\y' &= x \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + y \cos \theta \\z' &= z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\z' &= z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\x'_2 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \\x'_3 &= x_3\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$[r'] = [A][r]$$

تبدیل خطی

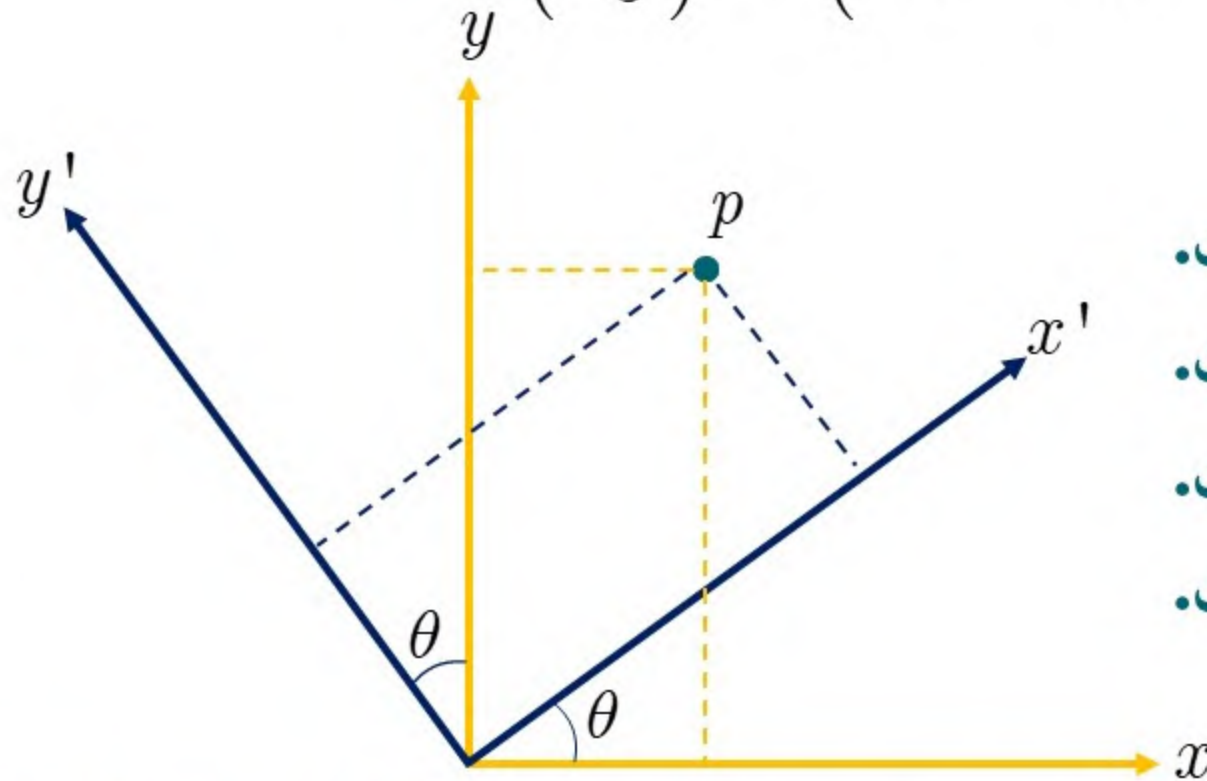
ماتریس تبدیل

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j$$



- a_{11} کسینوس زاویه‌ی بین محور x' و x است.
- a_{12} کسینوس زاویه‌ی بین محور x' و y است.
- a_{21} کسینوس زاویه‌ی بین محور y' و x است.
- a_{22} کسینوس زاویه‌ی بین محور y' و y است.

اگر دستگاه پریم دار نسبت به دستگاه بدون پریم حول محور دلخواهی چرخیده باشد، رابطه‌ی تبدیل را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \sum_{j=1}^3 a_{1j}x_j \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \sum_{j=1}^3 a_{2j}x_j \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \sum_{j=1}^3 a_{3j}x_j \end{aligned}$$

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, 3)$$

a_{ij} ها کسینوس‌های هادی محورهای دستگاه پریم دار نسبت به محورهای دستگاه بدون پریم است.



$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$$

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$



بردار کمیتی است که مؤلفه‌های آن تحت چرخش دستگاه مختصات، مانند مختصات نقاط تغییر کند.

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$$

$$F'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} F_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} F_j \quad (i = 1, 2, 3)$$



به راحتی دیده می شود که تحت تبدیل زیر طول بردار مکان ناورد است.

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\z' &= z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}'|^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\&= x^2 \cos^2 \theta + 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \sin^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta + y^2 \cos^2 \theta + z^2 \\&= x^2 + y^2 + z^2 \\&= |\mathbf{r}|^2\end{aligned}$$



به طور کلی، تبدیلی که تحت آن اندازه‌ی بردار ثابت بماند **تبدیل متعامد** نامیده می شود.

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j$$

$$\sum_i^3 (x'_i)^2 = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} x_j x_k = \sum_j^3 (x_j)^2$$

شرط این که تبدیل $A = \{a_{ij}\}$ متعامد باشد این است که

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$$



$$[\mathbf{r}'] = [\mathbf{A}][\mathbf{r}]$$

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j$$

اگر $B = A^{-1}$ وارون تبدیل A باشد،

$$[\mathbf{B}][\mathbf{r}'] = [\mathbf{A}^{-1}][\mathbf{A}][\mathbf{r}] = [\mathbf{r}]$$

$$[\mathbf{r}] = [\mathbf{B}][\mathbf{r}']$$

$$x_j = \sum_{i=1}^3 b_{ji} x'_i$$

$$x_j = \sum_{i=1}^3 b_{ji} \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k$$

$$x_j = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 b_{ji} a_{ik} x_k$$

$$\sum_{i=1}^3 b_{ji} a_{ik} = \delta_{jk}$$



$$\sum_{i=1}^3 b_{ji} a_{ik} = \delta_{jk}$$

$$b_{ji} = a_{ij}$$

بنابر این

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$$

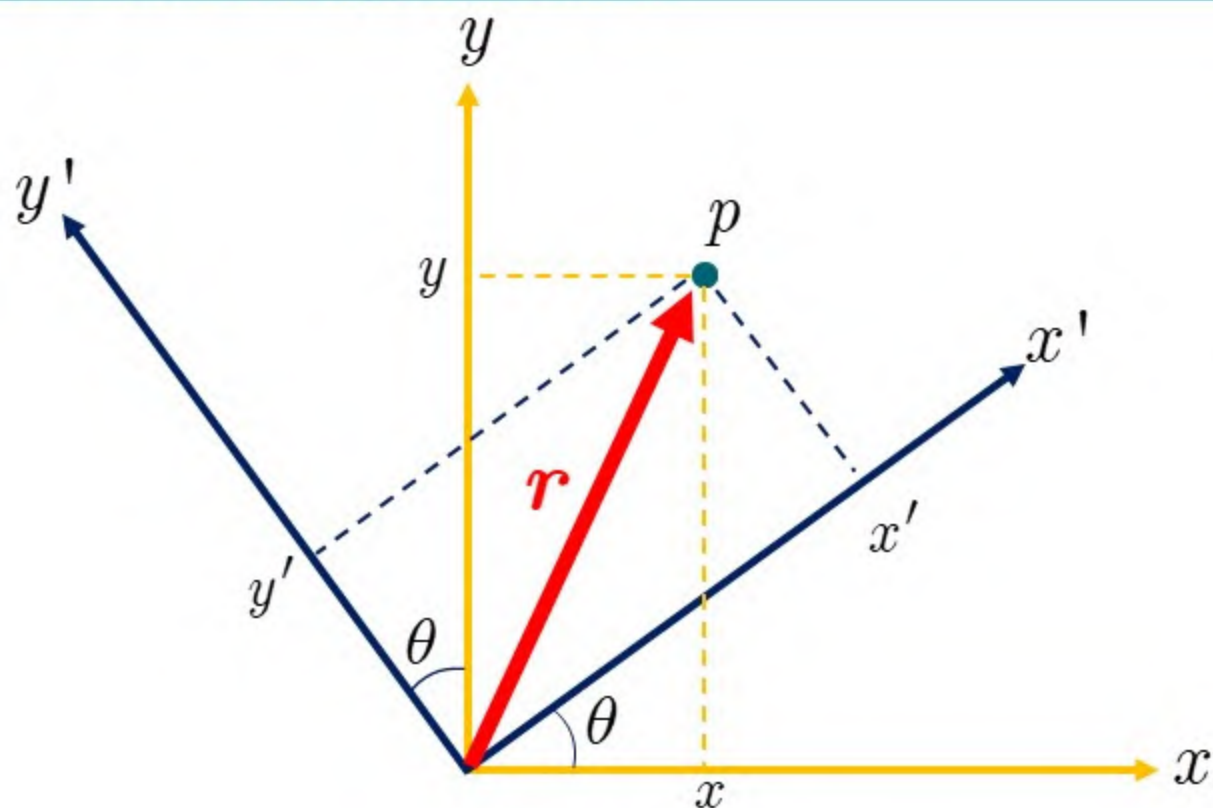
اما برای تبدیل متعامد دیدیم

یعنی وارون یک تبدیل متعامد برابر با ترانزپوز آن است

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$





$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\z' &= z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \\z &= z'\end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{G}; \quad F_i = \sum_j T_{ij} G_j$$

فرض کنید بردارهای F و G طبق معادله‌ی زیر با هم رابطه دارند متعامد باشد این است که

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

مثالی از چنین رابطه‌ای، رابطه‌ی بین تکانه‌ی زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای است

$$\mathbf{F}' = \mathbf{A}\mathbf{F}; \quad \mathbf{G}' = \mathbf{A}\mathbf{G}$$

اگر F' و G' تبدیل یافته‌ی F و G تحت تبدیل A باشند

می‌خواهیم رابطه‌ی تبدیل T را تحت تبدیل A به دست آوریم



$$\mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{G}; \quad F_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} G_j$$

$$F'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} F_j \quad G'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} G_j$$

$$\mathbf{F}' = \mathbf{T}'\mathbf{G}'; \quad F'_i = \sum_{j=1}^3 T'_{ij} G'_j$$

فرض کنید T' تبدیل یافته T تحت تبدیل A باشند

$$F'_i = \sum_{l=1}^3 a_{il} F_l = \sum_{l=1}^3 a_{il} \sum_{k=1}^3 T_{lk} G_k$$

$$F'_i = \sum_{l=1}^3 a_{il} \sum_{k=1}^3 T_{lk} \sum_{j=1}^3 a_{jk} G'_j$$

$$F'_i = \sum_{j=1}^3 \left[\sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{il} a_{jk} T_{lk} \right] G'_j$$

$$T'_{ij} = \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{il} a_{jk} T_{lk}$$



$$T'_{ij} = \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{il} a_{jk} T_{lk}$$

$$T'_{ij} = \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_l} \frac{\partial x'_j}{\partial x_k} T_{lk}$$



با دوران دستگاه مختصات

$$m' = m \quad \text{تانسور مرتبه‌ی صفر (اسکالر)}$$

$$F'_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} F_j \quad \text{تانسور مرتبه‌ی یک (برداری)}$$

$$T'_{ij} = \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_l} \frac{\partial x'_j}{\partial x_k} T_{lk} \quad \text{تانسور مرتبه‌ی دو (تانسور)}$$

$$T'_{ijm} = \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{s=1}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_l} \frac{\partial x'_j}{\partial x_k} \frac{\partial x'_m}{\partial x_s} T_{lks} \quad \text{تانسور مرتبه‌ی سه}$$

⋮



در این جا به اجمال در مورد تانسورها و بردارها تحت تبدیل دستگاه مختصات سخن گفتیم. بسیار مطالب جالب و کاربردی در مورد تانسورها و بردارها هست که در این جا مطرح نکردیم. در متون نسبتاً پیشرفته‌تر، می‌توانید جزئیات لازم و مفیدی را پیدا کنید. در این جا تمایزی بین بردارها و تانسورهای هموردا و پادوردا قائل نشدیم. مطالب را صرفاً در حد آشنایی اولیه با اصطلاحات بیان کرده‌ایم.



شاد و مهربان باشید

