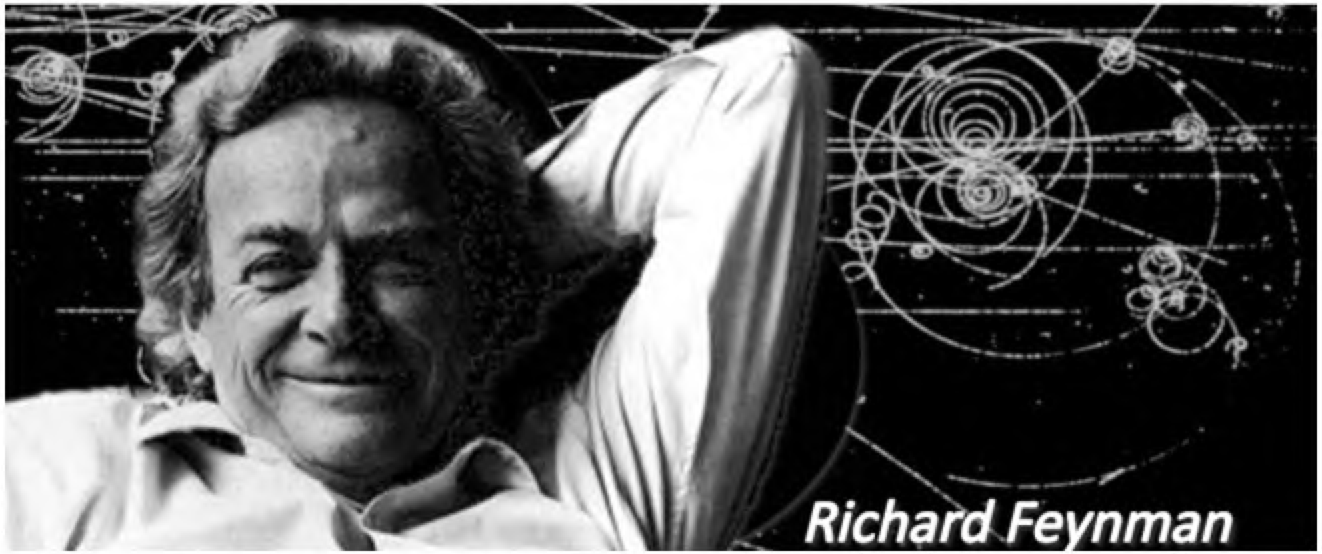
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس بیست و هفتم

مسائل مقدار مرزی-۵

Boundary Value Problems-Part5

دانشگاه خوارزمی

فرض کنید در ناحیه‌ای از فضا تقارن مسئله به گونه‌ای باشد که پتانسیل الکتریکی مستقل از مختصه‌ی z و فقط تابعی از مختصات ρ و ϕ باشد

$$\boxed{\Phi = \Phi(\rho, \phi)}$$

$$\boxed{\nabla^2\Phi = 0 \rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0}$$

$$\boxed{\Phi = R(\rho)F(\phi)}$$

$$\boxed{\frac{F(\phi)}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) + \frac{R(\rho)}{\rho^2}\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} = 0}$$

$$\boxed{\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) = -\frac{1}{F(\phi)}\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} = \alpha}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) = -\frac{1}{F(\phi)}\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} = \alpha$$

الف) $\alpha = 0$

$$\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) = \text{constant} \Rightarrow R(\rho) = A_0 + B_0 \ln\rho$$

$$\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} = 0 \Rightarrow F(\phi) = C_0 + D_0\phi$$

$$\Phi = R(\rho)F(\phi) = (A_0 + B_0\ln\rho)(C_0 + D_0\phi) = a_0 + b_0\phi + c_0\ln\rho + d_0\phi\ln\rho$$

$$\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) = -\frac{1}{F(\phi)}\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} = \alpha$$

ب) $\alpha = -\nu^2$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) + \frac{\nu^2}{\rho}R(\rho) = 0$$

$$R(\rho) = A\rho^{i\nu} + B\rho^{-i\nu}$$

$$\rho = e^{\ln\rho} \Rightarrow R = Ae^{i\nu\ln\rho} + Be^{-i\nu\ln\rho} = A'\cos(\nu\ln\rho) + B'\sin(\nu\ln\rho)$$

$$\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} - \nu^2F(\phi) = 0$$

$$F(\phi) = C\cosh(\nu\phi) + D\sinh(\nu\phi)$$

دانشگاه خوارزمی

$$\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) = -\frac{1}{F(\phi)}\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} = \alpha$$

ج) $\alpha = \nu^2$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho}R(\rho) = 0$$

$$R(\rho) = A\rho^{\nu} + B\rho^{-\nu}$$

$$\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} + \nu^2F(\phi) = 0$$

$$F(\phi) = C\cos(\nu\phi) + D\sin(\nu\phi)$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\Phi = \Phi(\rho, \phi)}$$

$$\boxed{\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) = -\frac{1}{F(\phi)}\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} = \alpha}$$

$\alpha = 0$	$\alpha = \nu^2$	$\alpha = -\nu^2$
ثابت	$\rho^{\nu}\cos\nu\phi$	$\cos(\nu\ln\rho)\cosh\nu\phi$
ϕ	$\rho^{\nu}\sin\nu\phi$	$\cos(\nu\ln\rho)\sinh\nu\phi$
$\ln\rho$	$\rho^{-\nu}\cos\nu\phi$	$\sin(\nu\ln\rho)\cosh\nu\phi$
$\phi\ln\rho$	$\rho^{-\nu}\sin\nu\phi$	$\sin(\nu\ln\rho)\sinh\nu\phi$
		$\cos(\nu\ln\rho)e^{\nu\phi}$
		$\cos(\nu\ln\rho)e^{-\nu\phi}$
		$\sin(\nu\ln\rho)e^{\nu\phi}$
		$\sin(\nu\ln\rho)e^{-\nu\phi}$

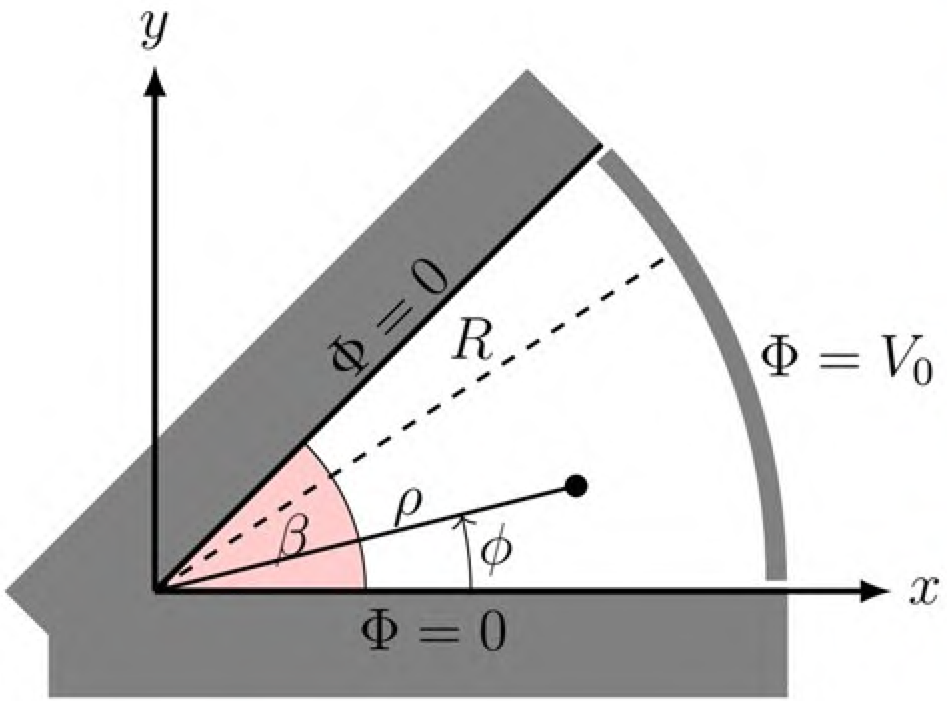
در برخی مسائل، تقارن به گونه ای است که سیستم تحت تبدیل $\phi \to \phi + 2\pi$ تغییر نمی‌کند. در این صورت

$$\Phi(\rho,\phi) = \Phi(\rho,\phi+2\pi) \Rightarrow F(\phi) = F(\phi+2\pi)$$

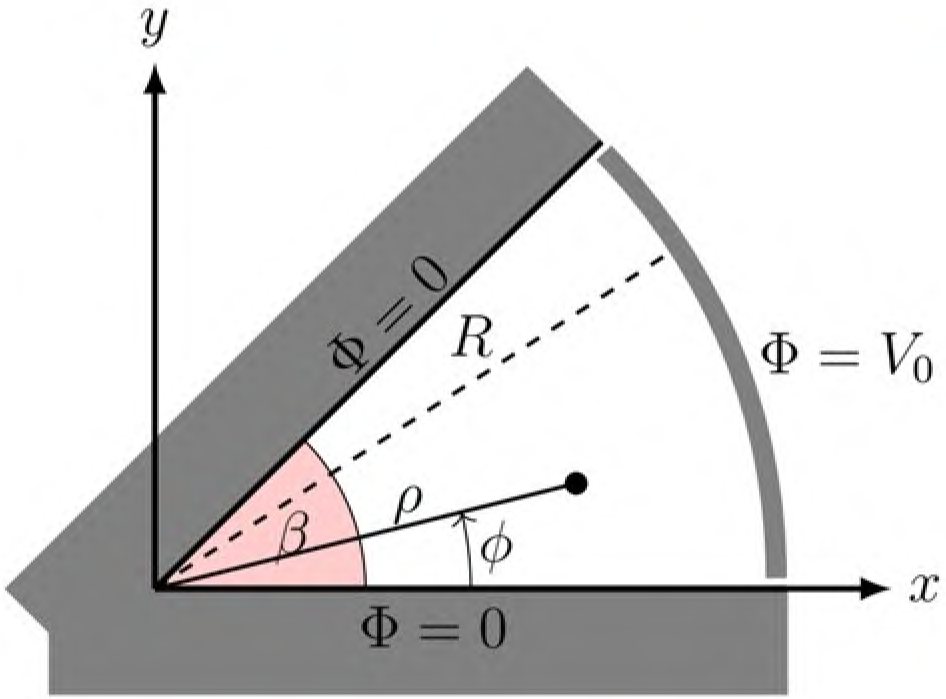
$$F(\phi) = \cos(n\phi), \qquad \sin(n\phi); \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

$$\Phi(\rho,\phi) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi\right]\rho^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n \cos n\phi + D_n \sin n\phi\right]\rho^{-n}$$

دانشگاه خوارزمی



دو دیواره‌ی رسانا در نظر بگیرید که یکی منطبق بر صفحه‌ی $\phi = 0$ (یعنی صفحه‌ی xz) و دیگری منطبق بر $\phi = \beta$ است. دیواره‌ها در محور z با هم مشترکند. این دیواره‌ها در پتانسیل صفر نگه داشته شده‌اند. انتهای لبه‌ی آزاد دو دیواره، با دیواره‌ای به شکل کمانی به شعاع $\rho = R$ بسته شده است. این دیواره‌ی کمانی شکل از دو دیواره‌ی دیگر عایق‌بندی شده است. پتانسیل این دیواره برابر با V_0 است. پتانسیل الکتریکی را در فضای بین این دیواره‌ها پیدا کنید.



به راحتی می‌توان بررسی کرد که در این مسئله ثابت جداسازی باید مثبت باشد

$$\alpha = +\nu^2$$

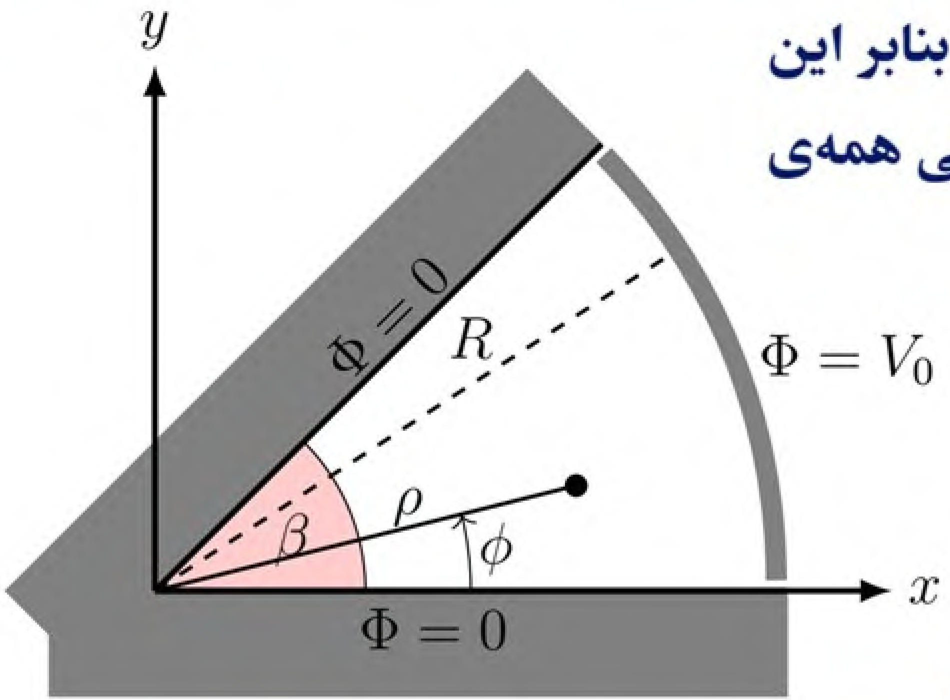
$$\boxed{\begin{aligned} R(\rho) &= A\rho^{\nu} + B\rho^{-\nu} \\ F(\phi) &= C\cos\nu\phi + D\sin\nu\phi \end{aligned}}$$

اما با توجه به شرایط مرزی به سادگی دیده می‌شود که

$\nu = n\pi/\beta$ **و** $B = C = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Phi(\rho, 0) = 0 \Rightarrow\ F(0) = 0\ \Rightarrow\ C = 0 \\ &\Phi(\rho, \beta) = 0 \Rightarrow\ F(\beta) = D\sin\nu\beta = 0\ \Rightarrow\ \nu = \frac{n\pi}{\beta} \\ &\Phi(0, \phi) \neq \infty \Rightarrow\ B = 0 \end{aligned}}$$

دانشگاه خوارزمی



یعنی به ازای مقادیر مختلف n پاسخ‌های متعددی برای پتانسیل داریم. بنابر این طبق قضیه‌ی برهم‌نهی، پتانسیلِ الکتریکی را می‌توان به شکل ترکیب خطی همه‌ی این پاسخ‌ها نوشت:

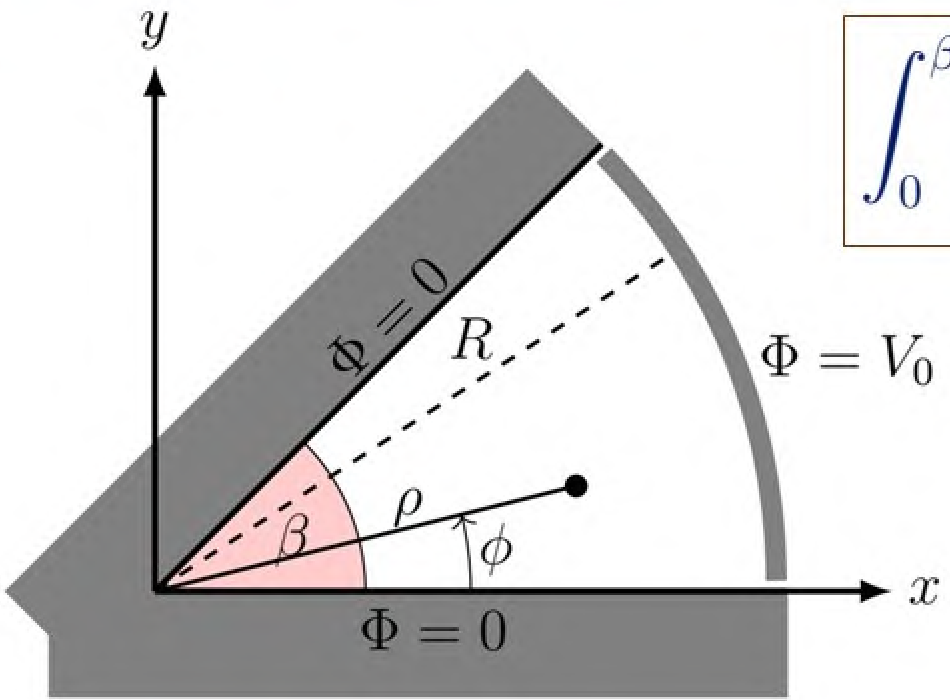
$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin \frac{n\pi}{\beta}\phi}$$

برای یافتنِ A_nها، از شرط مرزی بر روی سطحِ $\rho = R$ استفاده می کنیم

$$\boxed{\Phi(R, \phi) = V_0 \Rightarrow V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n R^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin \frac{n\pi}{\beta}\phi}$$

طرفین رابطه را در $\sin \frac{m\pi}{\beta}\phi$ ضرب می کنیم و از صفر تا β روی ϕ انتگرال می گیریم

دانشگاه خوارزمی

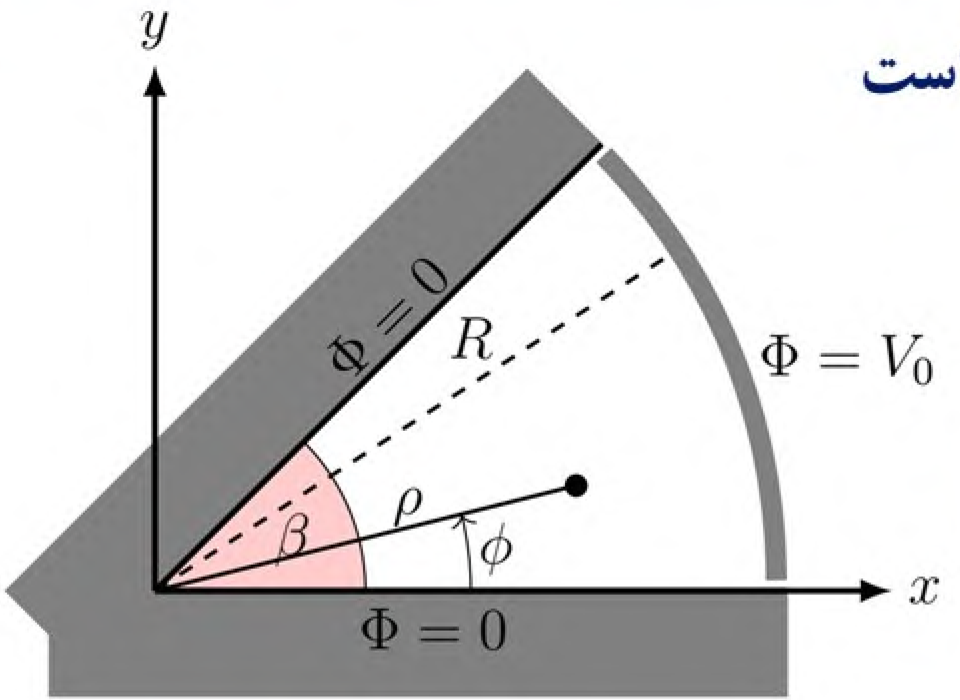


$$\int_0^{\beta} V_0 \sin\frac{m\pi}{\beta}\phi d\phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n R^{\frac{n\pi}{\beta}} \int_0^{\beta} \sin\frac{m\pi}{\beta}\phi \sin\frac{n\pi}{\beta}\phi d\phi$$

$$-V_0\frac{\beta}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{\beta}\phi\Big|_0^{\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n R^{\frac{n\pi}{\beta}} \frac{\beta}{2}\delta_{mn}$$

$$-V_0\frac{\beta}{m\pi}\big(\cos m\pi - 1\big) = A_m R^{\frac{m\pi}{\beta}}\frac{\beta}{2}$$

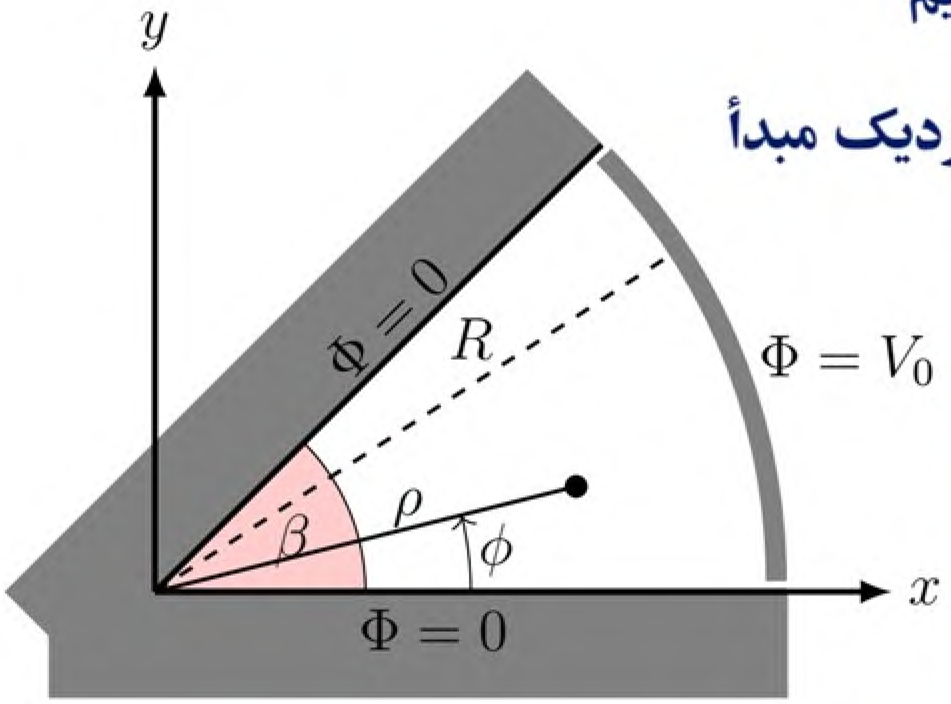
$$A_m = -V_0\frac{2}{m\pi}\big((-1)^m - 1\big)R^{\frac{-m\pi}{\beta}} = \begin{cases} 0 & m = \text{زوج} \\ V_0\frac{4}{m\pi}R^{\frac{-m\pi}{\beta}} & m = \text{فرد} \end{cases}$$



در نتیجه پتانسیل الکتریکی در فضای بین این دیواره‌ها به شکل زیر است

$$\begin{aligned}\Phi(\rho,\phi) &= \sum_{n=odd}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin\frac{n\pi}{\beta}\phi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k+1)\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{(2k+1)\pi}{\beta}} \sin\frac{(2k+1)\pi}{\beta}\phi\end{aligned}$$

می‌خواهیم میدان الکتریکی و چگالی سطحیِ بار را در لبه‌های تیز بررسی کنیم



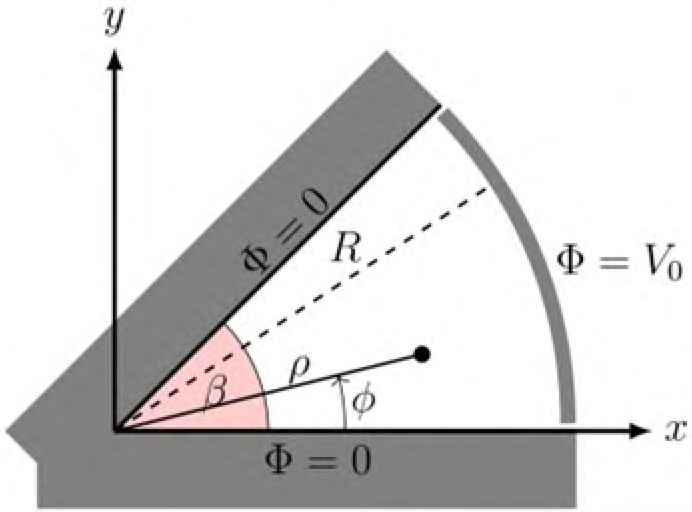
ابتدا برای مسئله‌ی قبل، چگالی بار را بر روی صفحات رسانا در نقاط نزدیک مبدأ $(\rho \ll R)$، محاسبه می‌کنیم

$$\Phi(\rho,\phi) = \sum_{n=odd}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin\frac{n\pi}{\beta}\phi$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k+1)\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{(2k+1)\pi}{\beta}} \sin\frac{(2k+1)\pi}{\beta}\phi$$

با توجه به کوچک بودنِ نسبت $\rho/R \ll 1$، در حاصلِ جمعِ فوق، پتانسیل را با جمله‌ی اول تقریب می‌زنیم:

$$\Phi(\rho,\phi) \approx \frac{4V_0}{\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\frac{\pi}{\beta}\phi$$



$$\Phi(\rho,\phi) \approx \frac{4V_0}{\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\frac{\pi}{\beta}\phi$$

و میدانِ الکتریکی در نزدیکی‌های مبدأ برابر است با

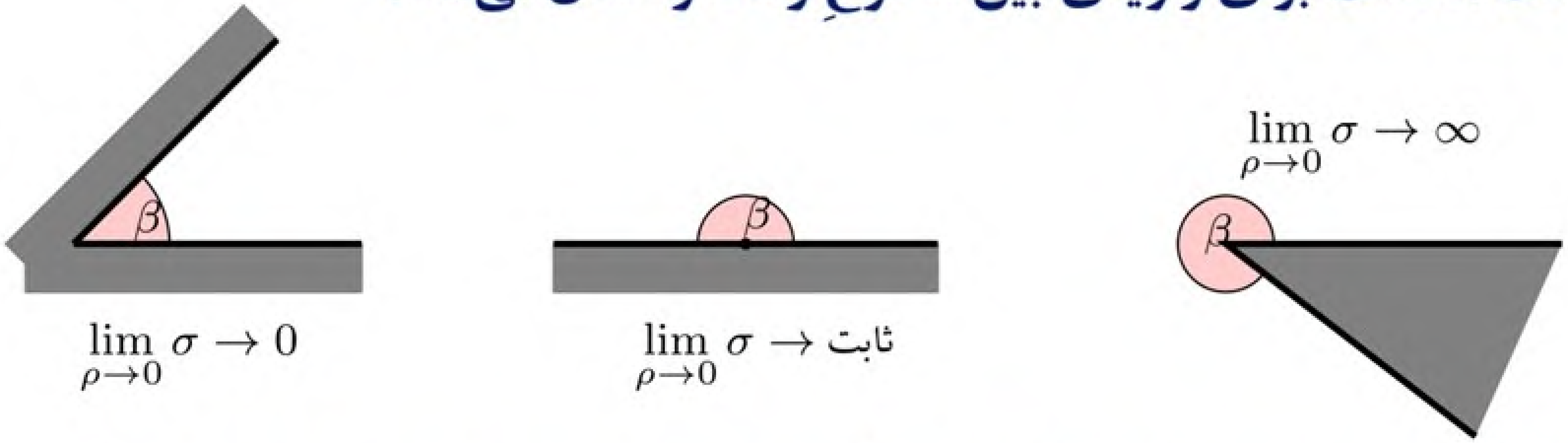
$$\boldsymbol{E}(\rho,\phi) = -\nabla\Phi(\rho,\phi) = -\frac{4V_0}{\beta}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{\pi}{\beta}-1}\left[\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \sin\frac{\pi}{\beta}\phi + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \cos\frac{\pi}{\beta}\phi\right]$$

چگالی سطحیِ بار بر روی صفحه‌ی $\phi = 0$

$$\sigma = \boldsymbol{E}(\rho,\phi)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\Big|_{\phi=0} = \boldsymbol{E}(\rho,\phi)\cdot(-\hat{\boldsymbol{e}}_\phi)\Big|_{\phi=\beta} \propto \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1}$$

$$\boxed{\sigma = \boldsymbol{E}(\rho,\phi)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\Big|_{\phi=0} = \boldsymbol{E}(\rho,\phi)\cdot(-\hat{\boldsymbol{e}}_\phi)\Big|_{\phi=\beta} \propto \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1}}$$

شکل‌های زیر سه حالت مختلف برای زاویه‌ی بین سطوحِ رسانا را نشان می‌دهد



وقتی $\beta<\pi$ **باشد (شکل سمتِ چپ) در واقع یک کُنج داریم** $\beta<\pi \Rightarrow \lim_{\rho\to0}\sigma\to0$

وقتی $\beta=\pi$ **باشد (شکل وسط)** $\frac{\pi}{\beta}-1=0$ **بنابر این** $\beta=\pi \Rightarrow \lim_{\rho\to0}\sigma\to$ **ثابت**

وقتی $\beta>\pi$ **باشد (شکل سمت راست)** $\frac{\pi}{\beta}-1=0$**، در واقع یک لبه‌ی تیز داریم** $\beta>\pi \Rightarrow \lim_{\rho\to0}\sigma\to\infty$

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی