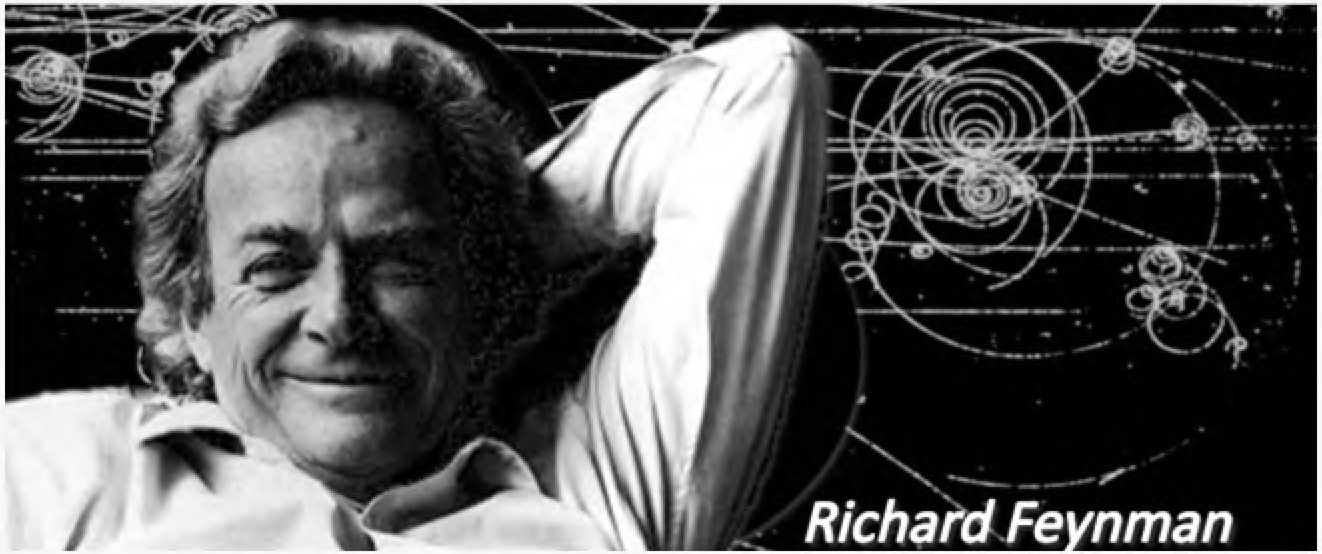
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

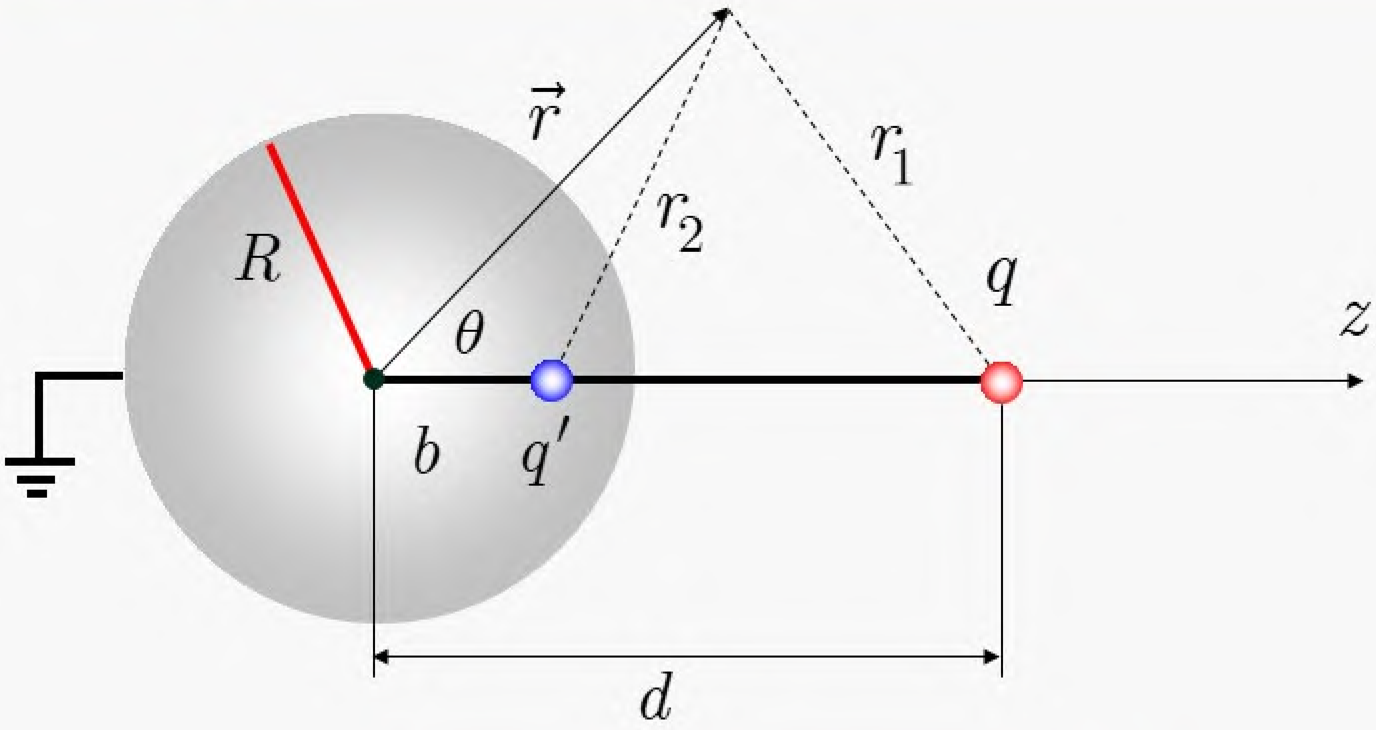
دانشگاه خوارزمی

درس بیست و نهم

روش تصویر - بخش ۲

Image Method-Part2

دانشگاه خوارزمی



$$q' = ?$$
$$b = ?$$

$$\boxed{\Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2}}$$

$$\boxed{\Phi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\right]}$$

پتانسیل کره برابر با صفر است. پس:

$$\Phi(R,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}}\right] = 0$$

$$\left[\frac{\frac{q}{R}}{\sqrt{1+\frac{d^2}{R^2}-2\frac{d}{R}\cos\theta}} + \frac{\frac{q'}{b}}{\sqrt{\frac{R^2}{b^2}+1-2\frac{R}{b}\cos\theta}}\right] = 0 \xrightarrow{\text{چرا؟}} \begin{array}{l} \frac{q}{R} = -\frac{q'}{b} \\ \frac{d}{R} = \frac{R}{b} \end{array}$$

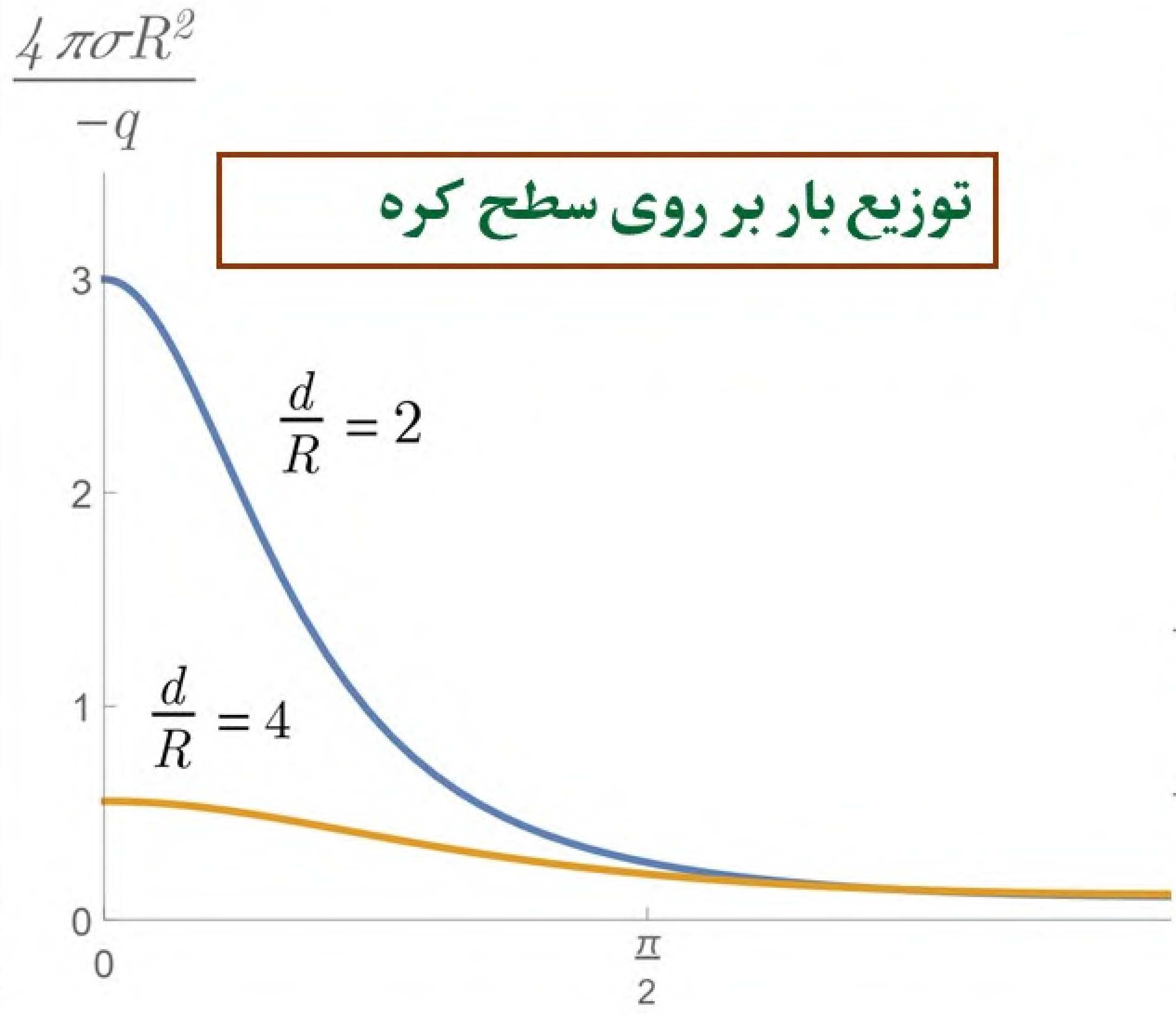
$$q' = -\frac{R}{d}q, \qquad b = \frac{R^2}{d}$$

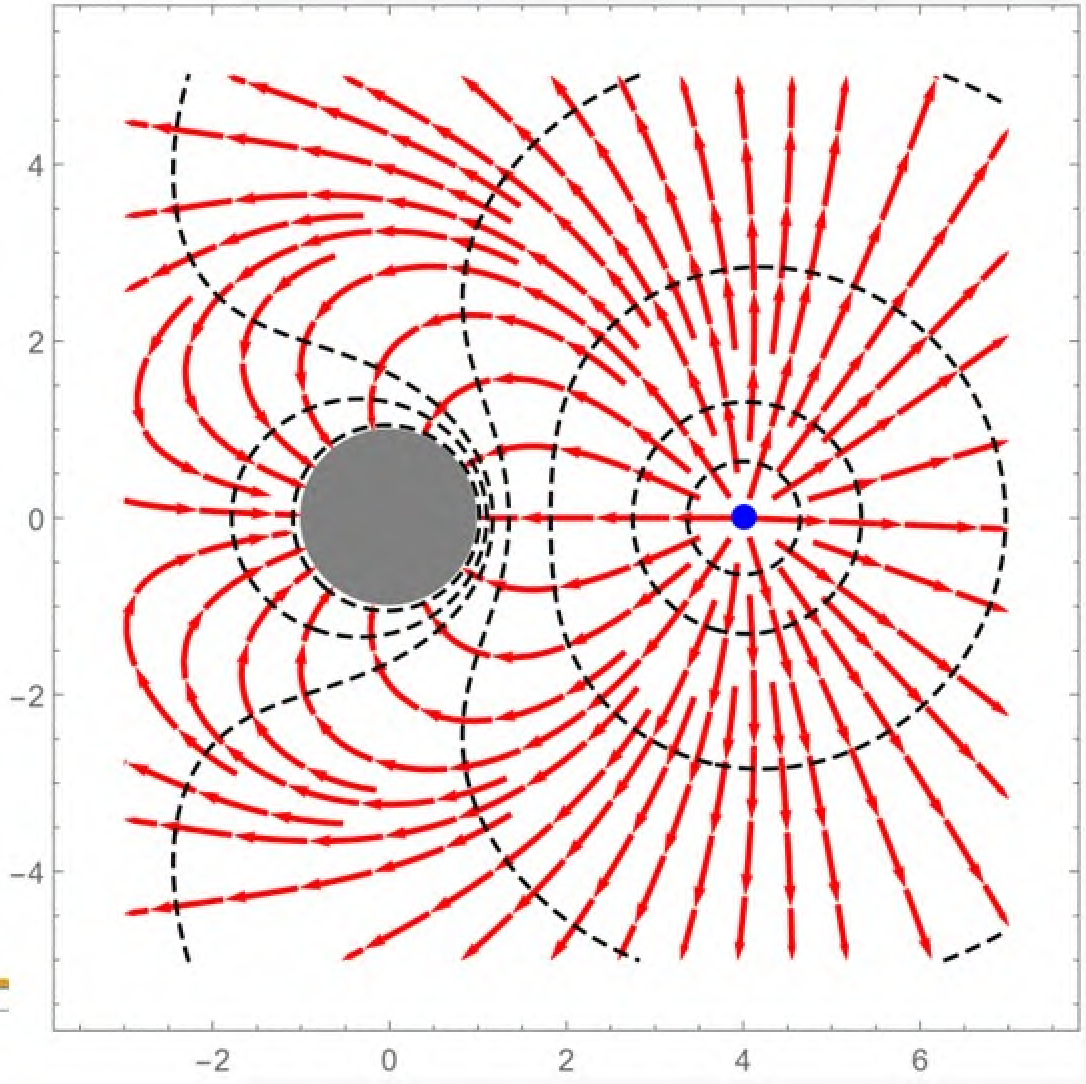
$$\Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} - \frac{R}{d\sqrt{r^2+\frac{R^4}{d^2}-2r\frac{R^2}{d}\cos\theta}}\right]$$

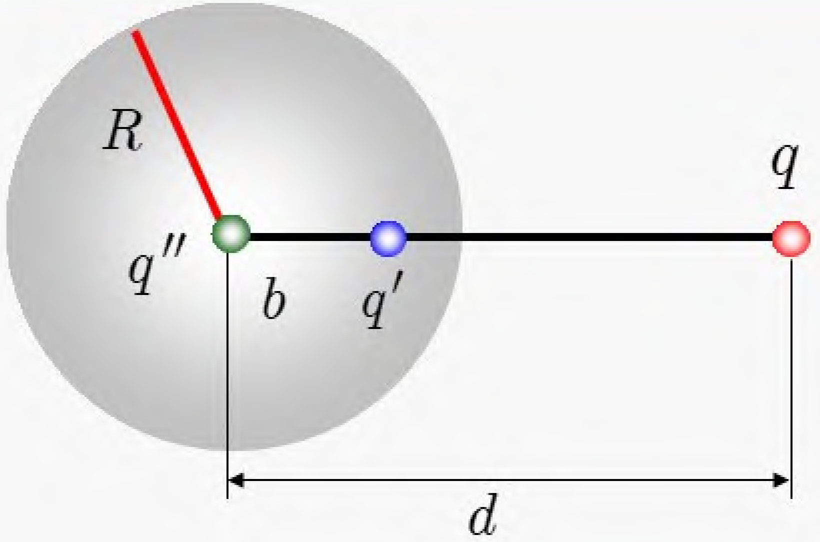
$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{-q}{4\pi R^2}\left(\frac{R}{d}\right)\frac{1-\frac{R^2}{d^2}}{\left(\frac{R^2}{d^2}-2\frac{R}{d}\cos\theta+1\right)^{3/2}}$$

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\sigma R^2\sin\theta d\theta d\phi = -\frac{R}{d}q$$ **نشان دهید**

دانشگاه خوارزمی


$\frac{4\pi\sigma R^2}{-q}$
توزیع بار بر روی سطح کره
$\frac{d}{R}=2$
$\frac{d}{R}=4$
3
2
1
0
0
$\frac{\pi}{2}$


4
2
0
−2
−4
−2
0
2
4
6



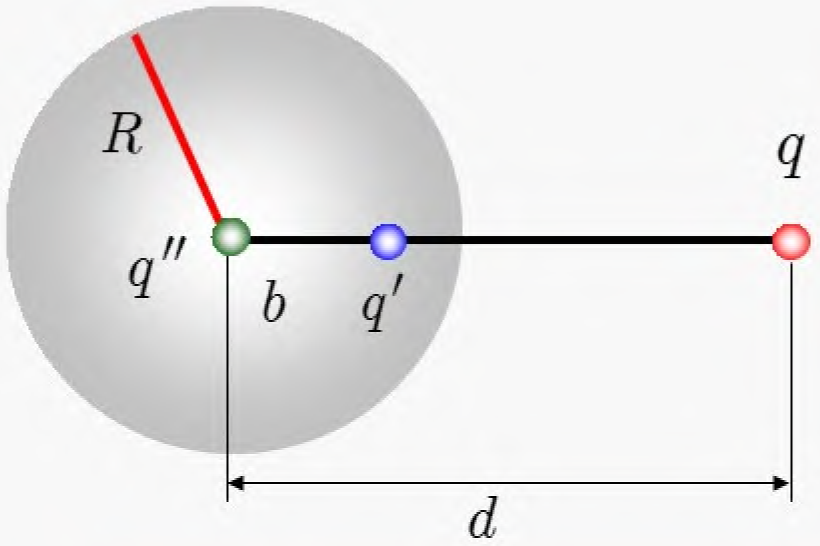
مسئله را برای وقتی که پتانسیل کره صفر نیست و دارای مقدار V_0 است، حل کنید

مسئله را مانند قبل حل می‌کنیم و بار تصویری q' را پیدا می‌کنیم. بارهای q و q' پتانسیل کره را صفر می‌کنند. بار q'' را در مرکز کره قرار می‌دهیم و مقدار آن را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که پتانسیل کره V_0 شود.

$$V_0 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \Rightarrow \quad q'' = 4\pi\epsilon_0 R V_0$$

$$\Phi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} - \frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}} + \frac{q''}{r}\right]$$

$$q' = -\frac{R}{d}q, \qquad b = \frac{R^2}{d}$$



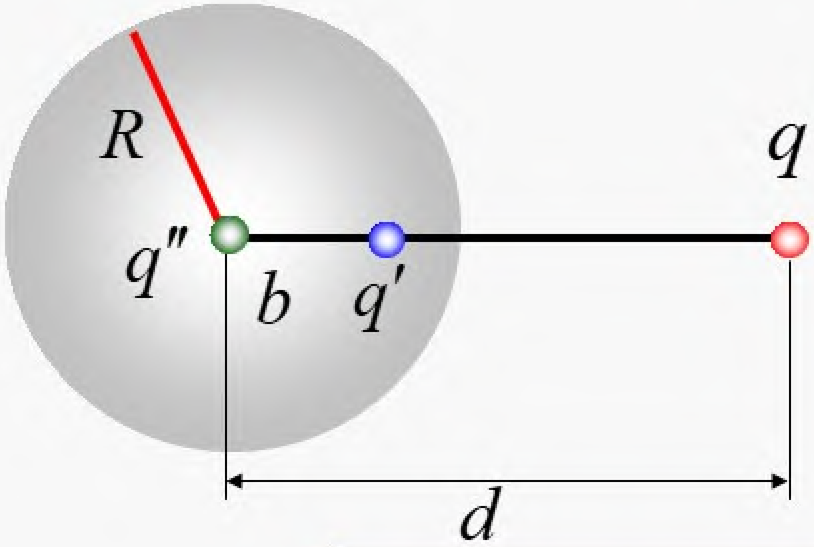
مسئله را مانند حالت قبل حل می‌کنیم. تنها بایستی q'' را در مرکز کره به گونه‌ای پیدا کنیم که بار کل کره Q شود:

$$q'' + q' = Q \Rightarrow q'' = Q + \frac{R}{d}q$$

$$\Phi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} - \frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}} + \frac{q''}{r}\right]$$

$$\boxed{q' = -\frac{R}{d}q, \quad b = \frac{R^2}{d}}$$

بار نقطه ای q در فاصله ی d از کره ی رسانایی که دارای بار کل Q است قرار دارد. کره و بار q چه نیرویی به هم وارد می کنند؟

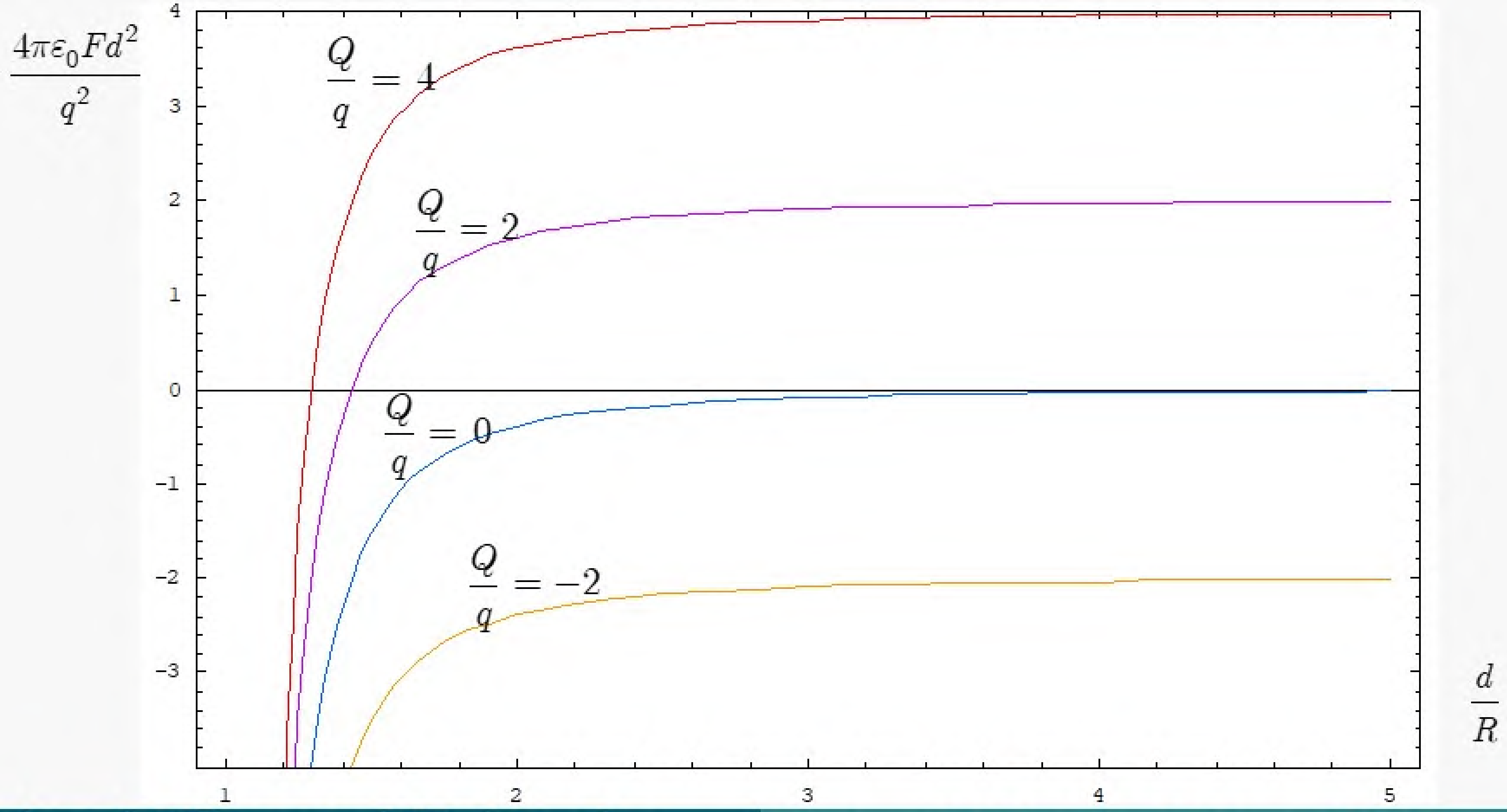


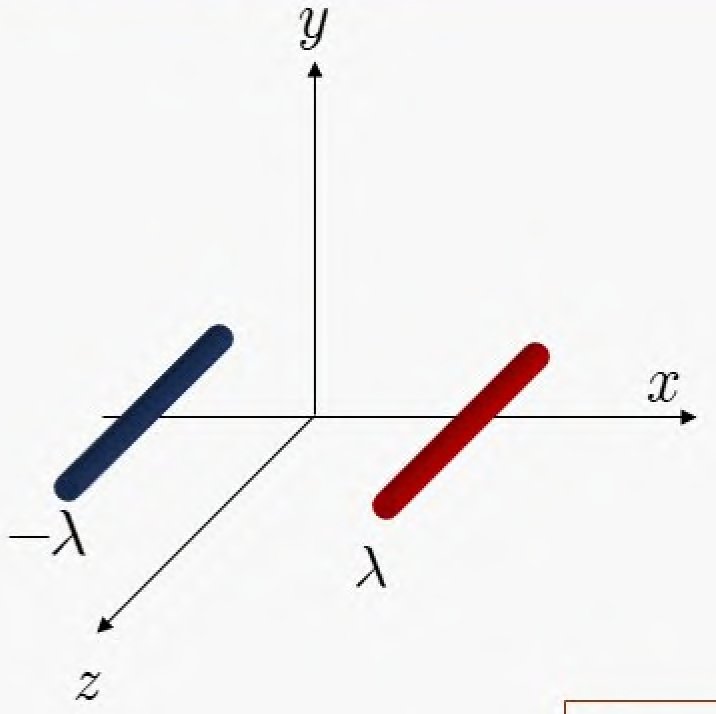
$$F=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q''}{d^2}+\frac{q'}{\left(d-b\right)^2}\right)$$

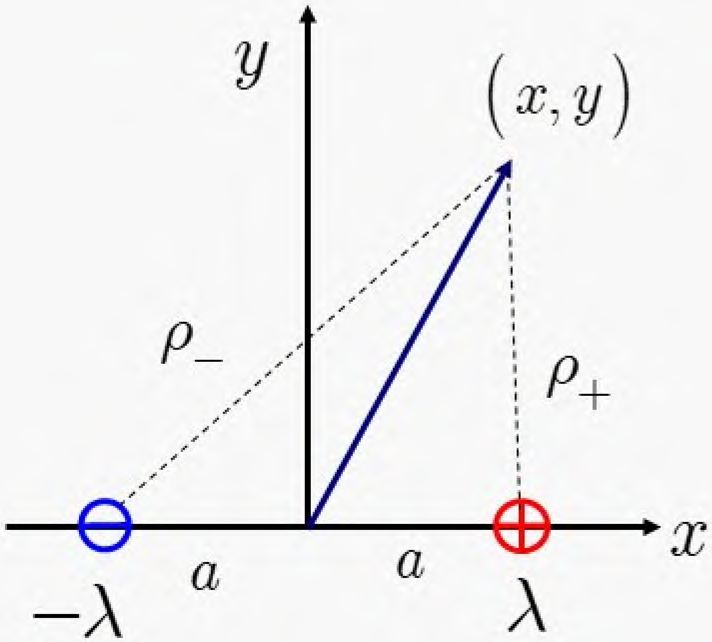
$$q''=Q+\frac{R}{d}q,\qquad q'=-\frac{R}{d}q$$

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2}\left(Q-\frac{qR^3\left(2d^2-R^2\right)}{d\left(d^2-R^2\right)^2}\right)$$

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2}\left(Q-\frac{qR^3\left(2d^2-R^2\right)}{d\left(d^2-R^2\right)^2}\right)$$

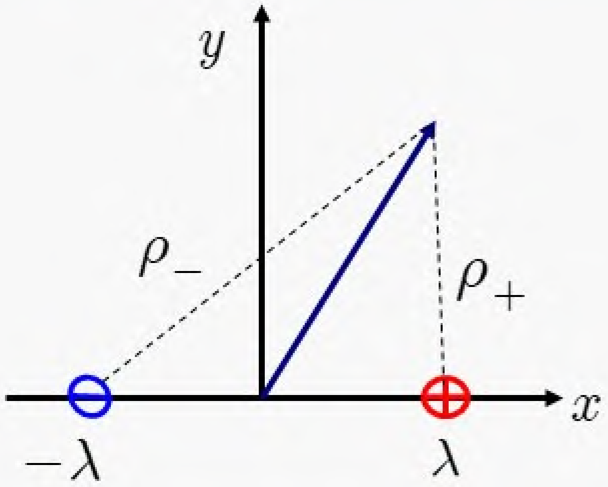






$$\boxed{\Phi = \Phi_- + \Phi_+}$$

$$\boxed{\Phi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_+}{\rho_0} + \left(-\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_-}{\rho_0}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_-}{\rho_+}}$$



$$\Phi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_-}{\rho_+}$$

واضح است که به ازای $\rho_- = \rho_+$ پتانسیل برابر با صفر است

معادله ی سطوح هم پتانسیل با رابطه ی روبرو داده می شود: $\dfrac{\rho_-}{\rho_+} = m$

خواهیم دید که این سطوح استوانه هایی موازی محور z هستند. اگر $m>1$ آن گاه مرکز استوانه بر روی بخش مثبت محور x قرار دارد. و اگر $m<1$ باشد مرکز استوانه روی بخش منفی محور x قرار دارد.

$$\rho_- = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

$$\rho_+ = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$(x+a)^2 + y^2 = m^2(x-a)^2 + m^2y^2$$

$$x^2 - 2x\left(\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)a + y^2 = -a^2$$

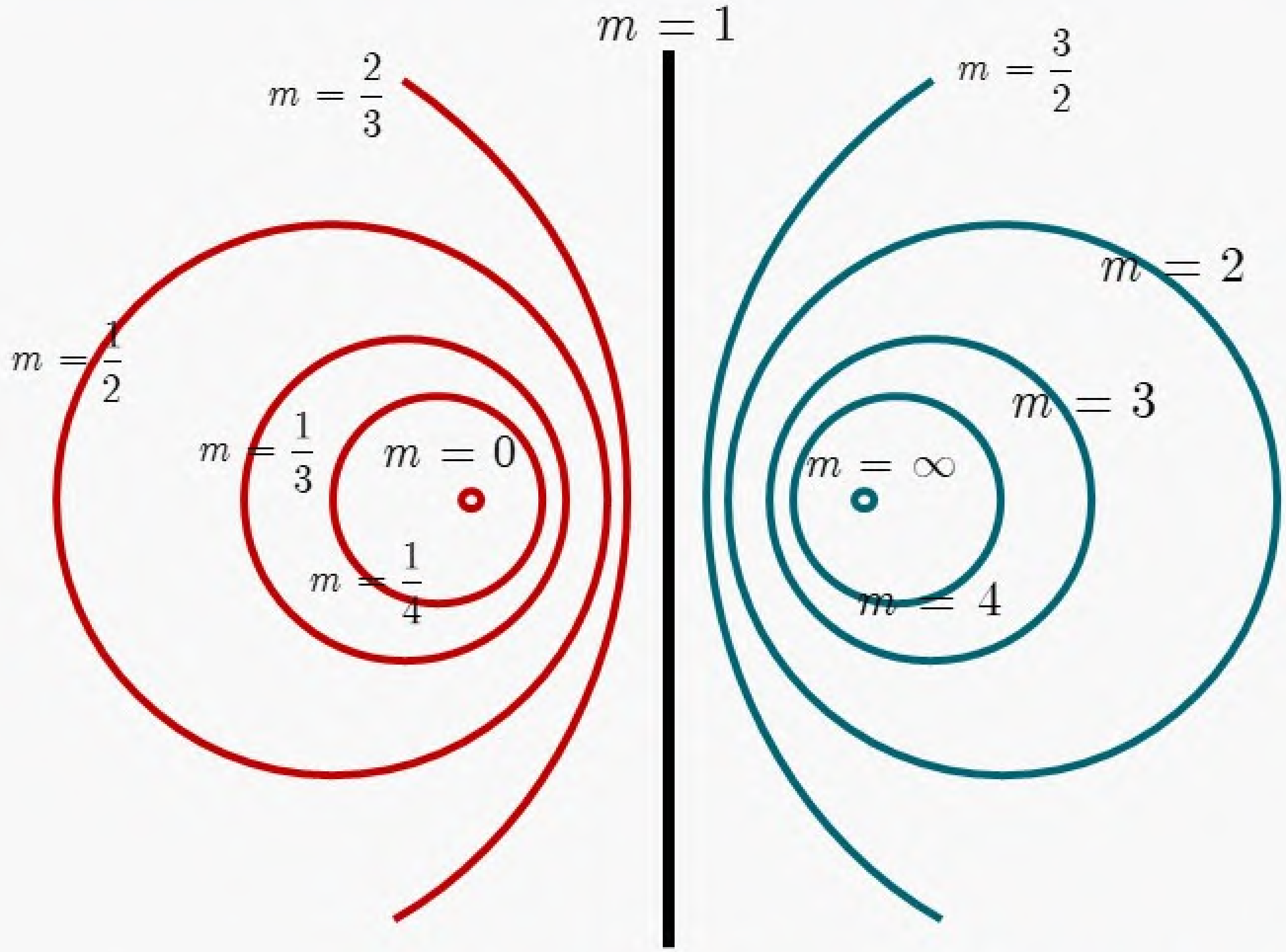
$$\left(x - \frac{m^2+1}{m^2-1}a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ma}{m^2-1}\right)^2$$

$$x_0 = \frac{m^2+1}{m^2-1}a, \qquad R = \frac{2ma}{|m^2-1|}$$

معادله‌ی استوانه ای به شعاع R و مرکز $(x_0, 0)$

$$R^2 = x_0^2 - a^2$$

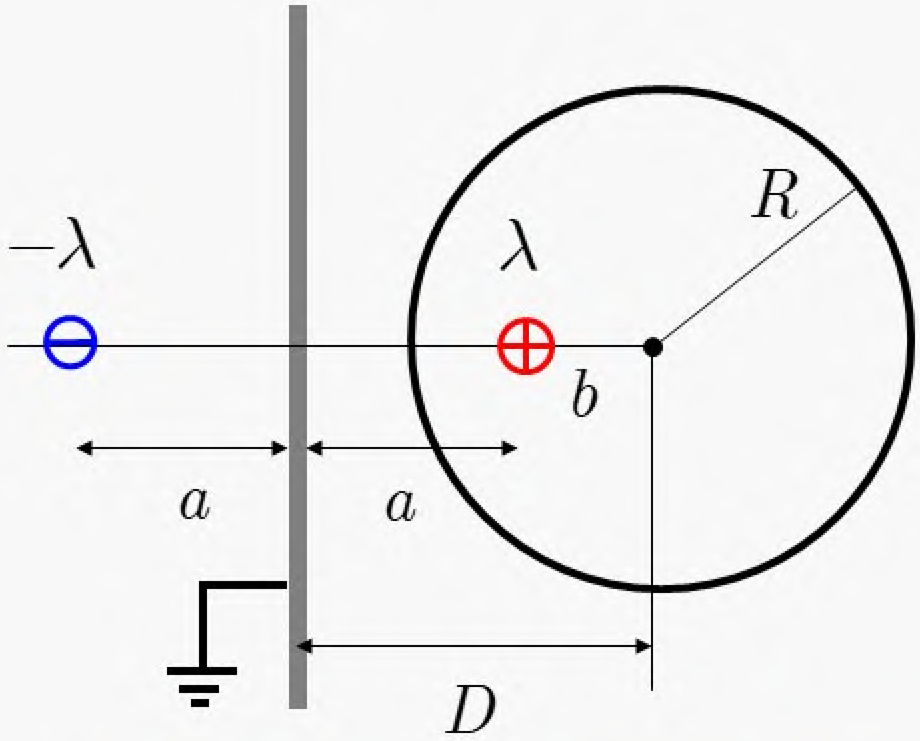
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$



پتانسیل هر یک از سطوح استوانه‌ای با را بطه‌ی زیر تعیین می شود:

$$\Phi_m = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln m$$

با توجه به مسئله‌ی بارهای خطی و سطوح هم پتانسیل آن‌ها، می‌توان مسائل متنوعی شامل سطوح استوانه‌ای (و صفحات تخت) حل کرد. مثلا برای یک استوانه به شعاع R که در فاصله‌ی D از یک صفحه‌ی تخت بی نهایت با پتانسیل صفر قرار گرفته است، می‌توان مسئله را به قرار دادن بارهای تصویری در مکان‌های مناسب، مطابق شکل حل کرد.



$$\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$$

فرض کنید چگالی بار دارای تقارن کروی باشد ، در این صورت:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(r)$$

کره‌ی باردار با چگالی بار یکنواخت

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho_0 && r \leq R \\ &\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 0 && r > R \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Phi_1(r) = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0}r^2 + \frac{\mathrm{A}_1}{r} + \mathrm{B}_1 && r \leq R \\ &\Phi_2(r) = \frac{\mathrm{A}_2}{r} + \mathrm{B}_2 && r > R \end{aligned}}$$

$$\Phi_1(r) = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{A_1}{r} + B_1 \qquad r \le R$$

$$\Phi_2(r) = \frac{A_2}{r} + B_2 \qquad r > R$$

$$\Phi_1(r \to 0) \neq \infty \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\Phi_2(r \to \infty) = 0 \Rightarrow B_2 = 0$$

$$\Phi_1(r) = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} r^2 + B_1 \qquad r \le R$$

$$\Phi_2(r) = \frac{A_2}{r} \qquad r > R$$

$$\Phi_1(R) = \Phi_2(R) \Rightarrow B_1 = \frac{A_2}{R} + \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} R^2$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right)_{r=R} \Rightarrow A_2 = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R^3$$

$$\Phi_1(r) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right) \qquad r \le R$$

$$\Phi_2(r) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0}\frac{1}{r} \qquad r > R$$

دانشگاه خوارزمی

در پایان فصل سوم کتاب ریتس و میلفورد، مطلب کوتاهی در باره‌ی ضرائب پتانسیل گفته شده است. از آن جا که در فصل ششم، این مطلب را به طور مفصل بحث خواهیم کرد در این جا از بیان آن خودداری کرده‌ام. پس موضوع ضرائب پتانسیل را به طور کامل به فصل ششم موکول می‌کنیم.

شاد و مهربان باشید