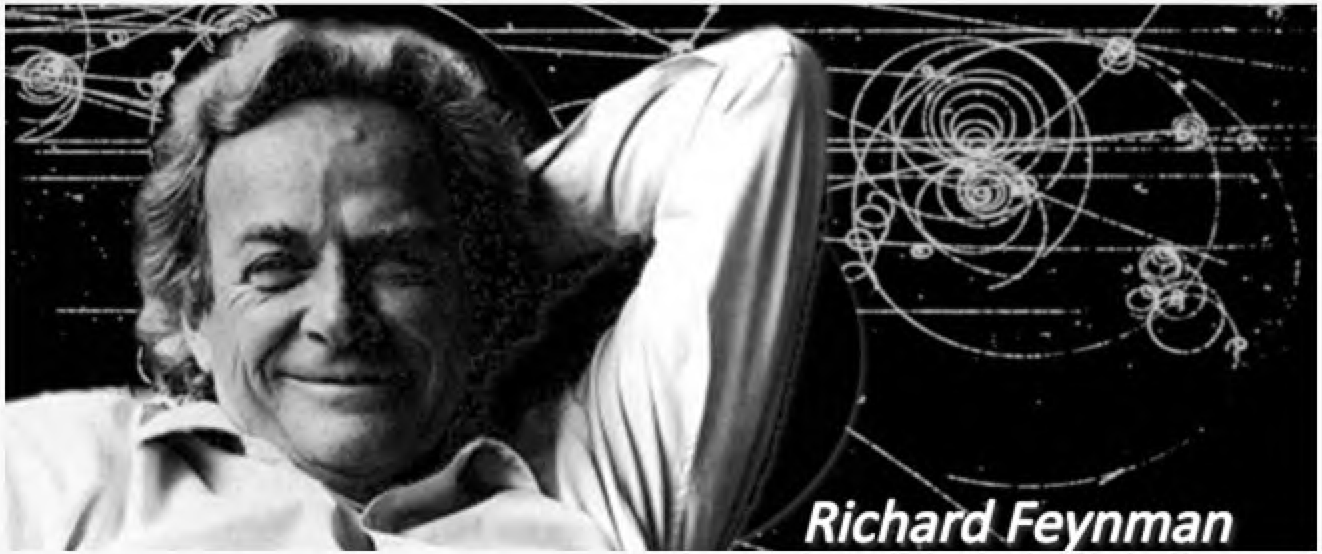
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

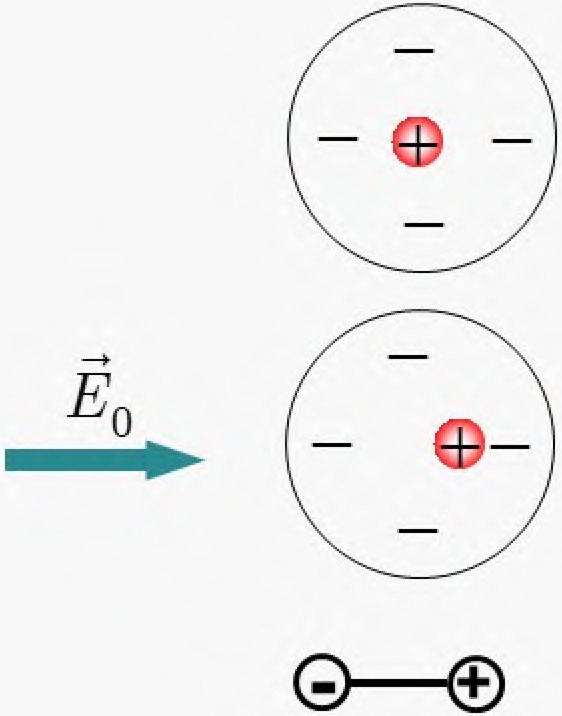
درس سی‌ام

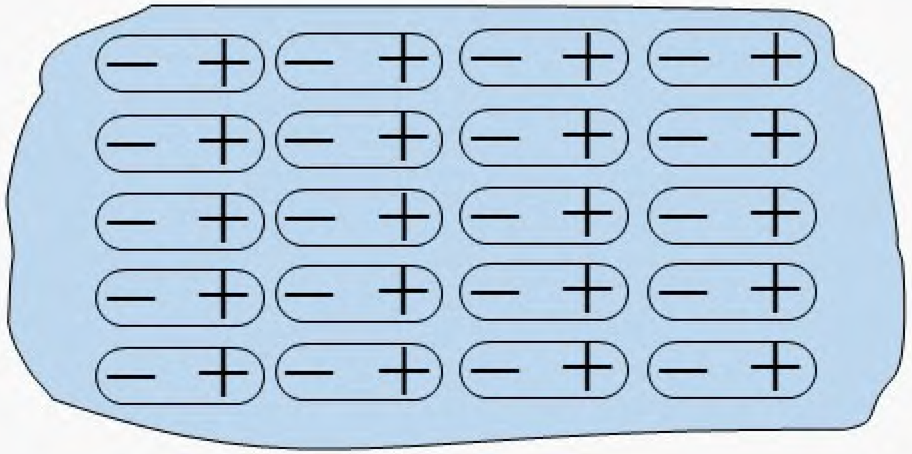
الکتروستاتیک در محیط‌های مادی

Electrostatics in Material Media

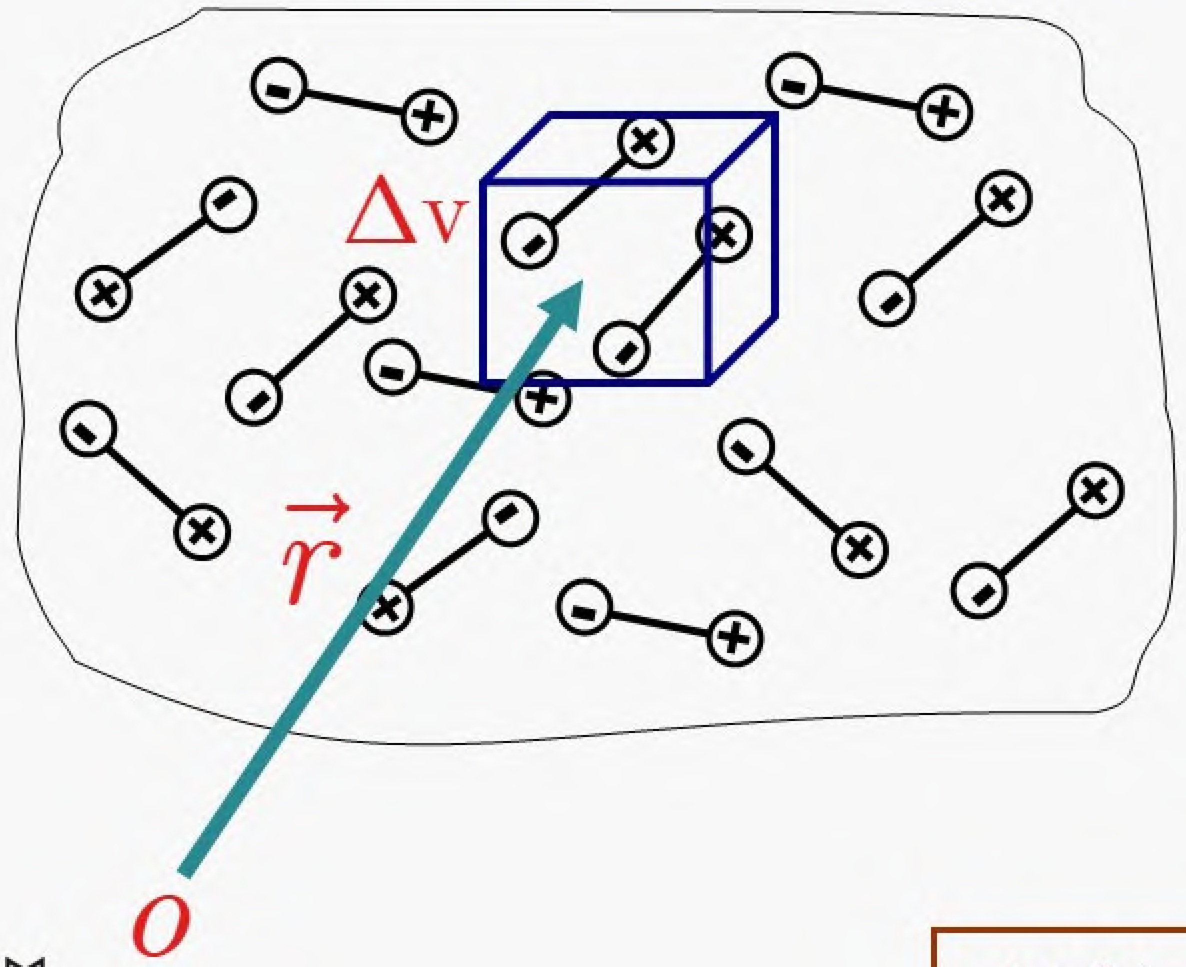
دانشگاه خوارزمی

تا این جا پتانسیل و میدان الکتریکی توزیع بارهای مختلف را در خلأ مطالعه کردیم. حال می‌خواهیم این کمیت‌ها را در حضور ماده بررسی کنیم.





قطعه‌ای از یک ماده‌ی قطبیده



چگالی گشتاور دو قطبی ماده در نقطه‌ی $\vec{r}$:

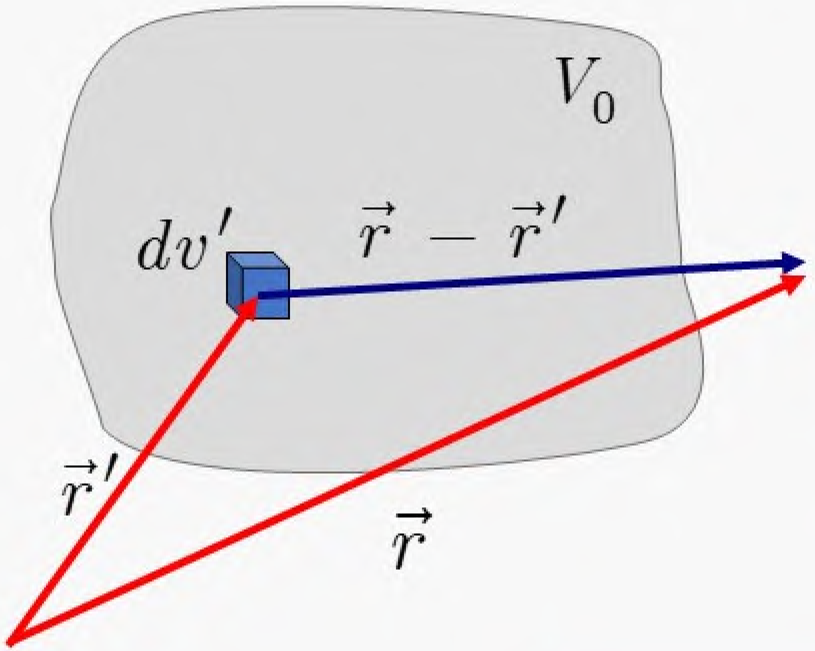
$$\boxed{\vec{\mathrm{P}} = \frac{1}{\Delta \mathrm{v}} \sum_i \vec{p}_i = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta \mathrm{v}}}$$

گشتاور دو قطبی یک مولکول

$$\boxed{\Delta \mathrm{v} \to 0}$$

$$\boxed{\vec{\mathrm{P}} = \frac{d\vec{p}}{d\mathrm{v}}}$$

چگالی گشتاور دو قطبی در هر نقطه را قطبش ماده در آن نقطه می‌نامیم.



$$\boxed{d\vec{p} = \vec{P} dv'}$$

$$\boxed{d\Phi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{p} \cdot \left(\vec{r} - \vec{r}'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}}$$

$$\boxed{\Phi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\vec{P} \cdot \left(\vec{r} - \vec{r}'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3} dv'}$$

$$\boxed{\Phi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{V_0} \frac{\vec{P}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}dv'}$$

$$\frac{\vec{P}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} = \vec{P}\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} = \vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{P}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\right) - \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$$

$$\boxed{\Phi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{V_0}\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{P}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\right)dv' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{V_0}\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dv'}$$

$$\boxed{\Phi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint\limits_{S_0}\frac{\vec{P}\cdot\hat{n}da'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{V_0}\frac{-\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dv'}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint\limits_{S_0}\frac{\vec{P}\cdot\hat{n}da'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{V_0}\frac{-\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dv'$$

$$\Phi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint\limits_{S_0}\frac{\sigma_p da'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{V_0}\frac{\rho_p}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dv'$$

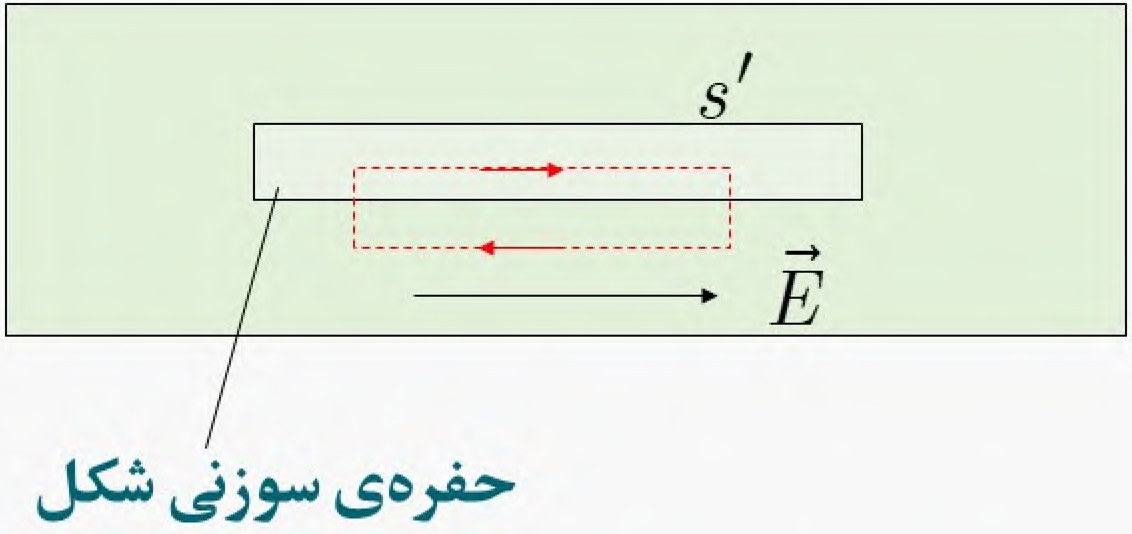
$$\sigma_p \equiv \vec{P}\cdot\hat{n}$$ **چگالی سطحی بار قطبشی**

$$\rho_p \equiv -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$ **چگالی حجمی بار قطبشی**

$$Q_p = \oint\limits_{S_0}\sigma_p da' + \int\limits_{V_0}\rho_p dv' = 0$$

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{S_0}\sigma_p da' \frac{\left(\vec{r} - \vec{r}'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_0}\rho_p dv' \frac{\left(\vec{r} - \vec{r}'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}$$

دانشگاه خوارزمی



$$\nabla \times \vec{\mathrm{E}}(\vec{r}) = 0$$
$$\oint \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{E}_v \cdot \vec{l} = \vec{E}_d \cdot \vec{l}$$

$$E_{vt} = E_{dt}$$

میدان الکتریکی درون دی‌الکتریک برابر است با میدان الکتریکی درون یک حفره‌ی سوزنی شکل در داخل دی‌الکتریک به شرطی که حفره در امتداد میدان باشد.

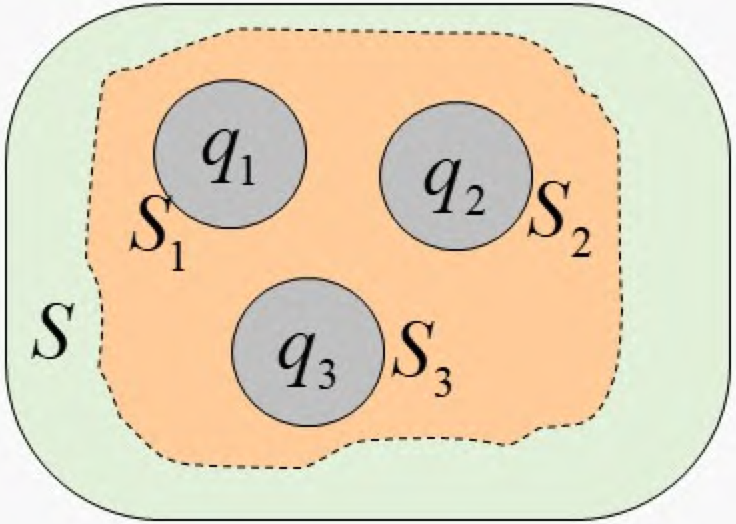
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{S_0+S'}\sigma_p da'\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_0-V_1}\rho_p dv'\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

حفره‌ی سوزنی را می‌توان تا حد دلخواه کوچک انتخاب کرد پس سهم انتگرال‌ها روی حجم و سطوح آن صفر خواهد بود. بدین ترتیب میدان درون دی الکتریک از همان رابطه‌ای به دست می‌آید که در خارج آن:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{S_0}\sigma_p da'\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_0}\rho_p dv'\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{S_0}\frac{\sigma_p da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_0}\frac{\rho_p dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

دانشگاه خوارزمی



$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}da = \frac{Q+Q_p}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{Q = q_1 + q_2 + q_3}$$

$$\boxed{Q_p = \int_{S_1+S_2+S_3}\vec{P}\cdot\hat{n}da + \int_V -\vec{\nabla}.\vec{P}dv}$$

$$\boxed{Q_p = \int_{S_1+S_2+S_3}\vec{P}\cdot\hat{n}da - \int_{S+S_1+S_2+S_3}\vec{P}\cdot\hat{n}da = -\oint_S \vec{P}\cdot\hat{n}da}$$

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{Q + Q_p}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \oint \vec{P} \cdot \hat{n} da}$$

$$\boxed{\oint \left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) \cdot \hat{n} da = Q}$$

$$\boxed{\oint \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q}$$

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

بردار جابجایی الکتریکی

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho}$$

دانشگاه خوارزمی

پذیرفتاری الکتریکی

$$\boxed{\vec{\mathrm{P}} = \chi \vec{\mathrm{E}}}$$

از لحاظ ماکروسکوپی، رفتار دی‌الکتریک در واکنش به میدان الکتریکی با یک رابطه ی تجربی به نام معادله‌ی ساختمندی بیان می شود

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{D} = \left(\epsilon_0 + \chi\right)\vec{E} = \epsilon \vec{E}}$$

ضریب گذردهی ماده

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r$$

ضریب گذردهی نسبی
(ثابت دی الکتریک)

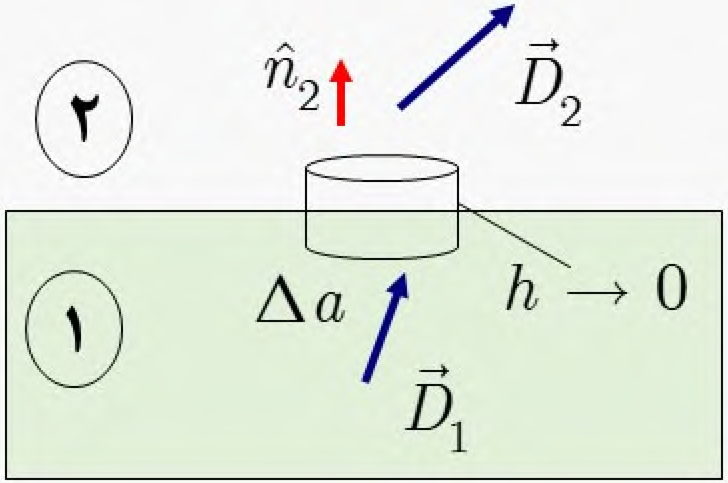
$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 K \vec{E}}$$

اگر پذیرفتاری الکتریکی (یا ثابت دی الکتریک) به موقعیت نقطه در دی الکتریک بستگی نداشته باشد، ماده را همگن homogeneous می نامیم.

اگر پذیرفتاری الکتریکی (یا ثابت دی الکتریک) به جهت میدان در دی الکتریک بستگی نداشته باشد، ماده را همسانگرد isotropic می نامیم.

اگر پذیرفتاری الکتریکی (یا ثابت دی الکتریک) به میدان الکتریکی در دی الکتریک بستگی نداشته باشد، ماده را خطی linear می نامیم.

دانشگاه خوارزمی



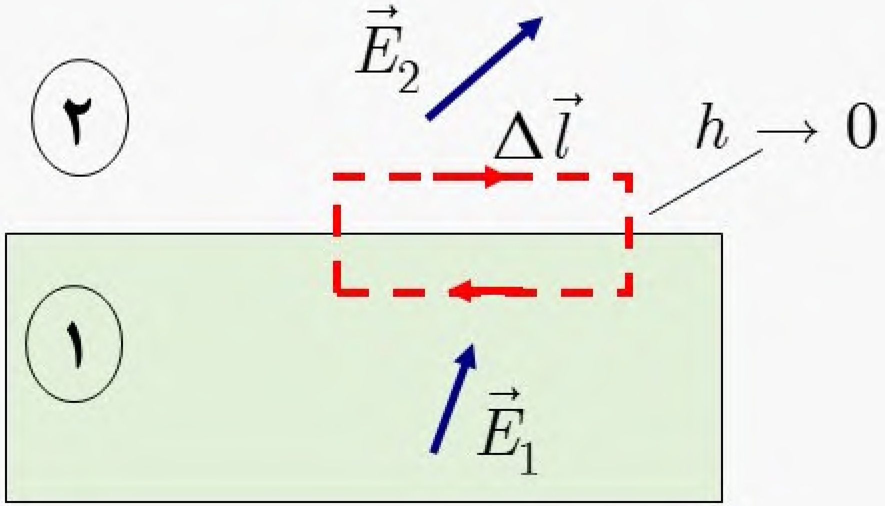
$$\boxed{\oint \vec{D} \cdot \hat{n} d\vec{a} = Q}$$

$$\boxed{\vec{D} \cdot \hat{n}_2 \Delta a + \vec{D} \cdot \hat{n}_1 \Delta a = \sigma \Delta a} \qquad \boxed{\hat{n}_1 = -\hat{n}_2}$$

$$\boxed{\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \hat{n}_2 = \sigma}$$

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$$

اگر چگالی سطحی بارهای آزاد روی مرز دو محیط صفر باشد،
مؤلفه‌ی عمودی بردار جابجایی الکتریکی پیوسته است.



$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$$

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

$$\boxed{\vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{l} - \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{l} = 0}$$

$$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$$

مؤلفه ی مماسی میدان الکتریکی بر مرز دو محیط پیوسته است.

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi}$$

برای دی الکتریک های **خطی، همسانگرد و همگن** داریم:

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}}$$

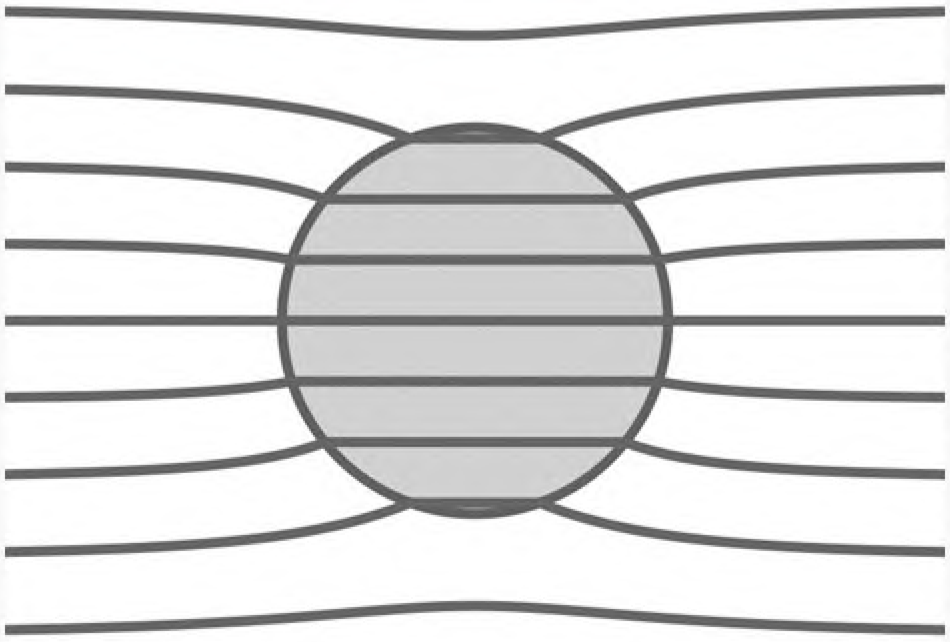
بدین ترتیب پتانسیل در معادله‌ی پواسون صدق می کند:

$$\boxed{\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}}$$

در نقاطی که چگالی بار **آزاد** صفر است داریم:

$$\boxed{\nabla^2\Phi = 0}$$

دانشگاه خوارزمی



کره ی دی الکتریک به شعاع R در یک میدان الکتریکی (که در ابتدا یکنواخت بوده) قرار دارد، پتانسیل و میدان الکتریکی را درون و بیرون کره به دست آورید.

راستای اولیه‌ی میدان را محور z انتخاب می کنیم.

$$\vec{E}_0 = E_0 \hat{e}_z$$

تحت این شرایط پتانسیل مستقل از زاویه‌ی سمتی است

$$\Phi_{out}\left(r,\theta\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right]P_n\left(\cos\theta\right), \qquad r > R$$

$$\Phi_{in}\left(r,\theta\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n' r^n + B_n' r^{-(n+1)}\right]P_n\left(\cos\theta\right), \qquad r < R$$

$$\Phi_{in}\left(r = 0,\theta\right) \neq \infty \Rightarrow B_n' = 0 \quad for \quad n \geq 0$$

$$\lim_{r\to\infty}\Phi_{out}(r,\theta) = -\int \vec{\mathrm{E}}\cdot d\vec{l} = -E_0 z + c = -E_0 r\cos\theta + c$$

$$A_0 = c, \quad A_1 = -E_0\ , \quad A_n = 0 \ \ for \ \ n \geq 2$$

در این مسئله $B_0 = 0$ توضیح دهید چرا؟

$$\boxed{\Phi_{in}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad r < R}$$

$$\boxed{\Phi_{out}(r,\theta) = A_0 - E_0 r\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-(n+1)}\, P_n(\cos\theta), \qquad r > R}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Phi_{in}(R,\theta) = \Phi_{out}(R,\theta) \\ &\left[D_{1r} = D_{2r}\right]_{r=R} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Phi_{in}(R,\theta) = \Phi_{out}(R,\theta) \\ &\varepsilon \left.\frac{\partial \Phi_{in}}{\partial r}\right|_{r=R} = \varepsilon_0 \left.\frac{\partial \Phi_{out}}{\partial r}\right|_{r=R} \end{aligned}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$A_0 - E_0 R\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n R^{-(n+1)}\ P_n\left(\cos\theta\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n R^n\ P_n\left(\cos\theta\right)$$

$$A_0 - E_0 R\cos\theta + B_1 R^{-2}\ \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n R^{-(n+1)}\ P_n\left(\cos\theta\right)$$
$$= A'_0 + A'_1 R^1\ \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} A'_n R^n\ P_n\left(\cos\theta\right)$$

$$A_0 = A'_0, \quad - E_0 R + B_1 R^{-2} = A'_1 R,$$
$$B_n = A'_n R^{2n+1} \qquad for \quad n \geq 2$$

دانشگاه خوارزمی

$$-\epsilon_0 E_0 \cos\theta + \epsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} -(n+1) B_n R^{-(n+2)} \; P_n\left(\cos\theta\right) = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} n A_n' R^{n-1} \; P_n\left(\cos\theta\right)$$

$$-\epsilon_0 E_0 \cos\theta - 2\epsilon_0 B_1 R^{-3} \; \cos\theta - \epsilon_0 \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) B_n R^{-(n+2)} \; P_n\left(\cos\theta\right)$$

$$= \epsilon A_1' \cos\theta + \epsilon \sum_{n=2}^{\infty} n A_n' R^{n} \; P_n\left(\cos\theta\right)$$

$$-\epsilon_0 E_0 - 2\epsilon_0 B_1 R^{-3} = \epsilon A_1',$$

$$B_n = \frac{-n\epsilon}{\epsilon_0\left(n+1\right)} A_n' R^n \qquad for \qquad n \geq 2$$

$$\boxed{B_n = A'_n = 0 \qquad for \qquad n \geq 2}$$

$$\boxed{B_1 = E_0 R^3 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} = E_0 R^3 \frac{K - 1}{K + 2}}$$

$$\boxed{A'_1 = \frac{-3\epsilon}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 = \frac{-3K}{K + 2} E_0}$$

$$\boxed{\Phi_{out}\left(r,\theta\right) = A_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{K-1}{K+2}E_0 R^3\frac{\cos\theta}{r^2}, \qquad r > R}$$

$$\boxed{\Phi_{in}\left(r,\theta\right) = A_0 - \frac{3K}{K+2}E_0 r\cos\theta, \qquad r < R}$$

$$\boxed{\vec{E}_{in} = \frac{3K}{K+2}\vec{E}_0}$$

نیروی وارد بر یک عنصر بار کوچک واقع در میدان الکتریکی $\vec{E}$

$$\boxed{d\vec{F} = dq\vec{E}}$$

نیروی وارد بر توزیع بار حجمی

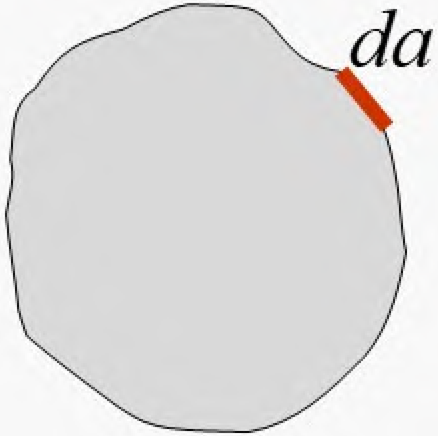
$$\boxed{\vec{F} = \int_V dq\vec{E} = \int_V \rho\vec{E}dv}$$

نیروی وارد بر توزیع بار سطحی

$$\boxed{\vec{F} = \int_S dq\vec{E} = \int_S \sigma\vec{E}da}$$

دانشگاه خوارزمی

نیروی وارد بر یک رسانا درون دی الکتریک



$$\boxed{\vec{F} = \oint \sigma \vec{E}' da}$$

$$\boxed{\vec{E}' = \vec{E} - \vec{E}_s}$$

E' میدان الکتریکی در روی سطح da است که میدان ناشی از خود عنصر سطح از آن کم شده است.

$$\vec{E}_s = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\hat{n}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon}\hat{n}}$$

$$\boxed{\vec{E}' = \frac{\sigma}{2\epsilon}\hat{n} = \frac{1}{2}\vec{E}}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{2}\oint \sigma \vec{E} da}$$

دانشگاه خوارزمی

کره ی رسانا دارای بار الکتریکی Q در یک میدان خارجی یکنواخت قرار دارد. چه نیرویی به آن وارد می شود؟

می توان نشان داد که پتانسیل در خارج رسانا به شکل زیر است:

$$\boxed{\Phi\left(r,\theta\right) = \Phi_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 R^3\cos\theta}{r^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon r}}$$

$$\boxed{E_r = E_0\cos\theta + \frac{2E_0 R^3\cos\theta}{r^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}}$$

$$\boxed{\sigma\left(\theta\right) = \epsilon E_r\Big|_{r=R} = 3\epsilon E_0\cos\theta + \frac{Q}{4\pi R^2}}$$

$$\boxed{F = F_z = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sigma E_r\left(r = R\right)\cos\theta 2\pi R^2 \sin\theta d\theta}$$

$$\boxed{F = F_z = QE_0}$$

$$\boxed{\vec{F} = Q\vec{E}_0}$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید