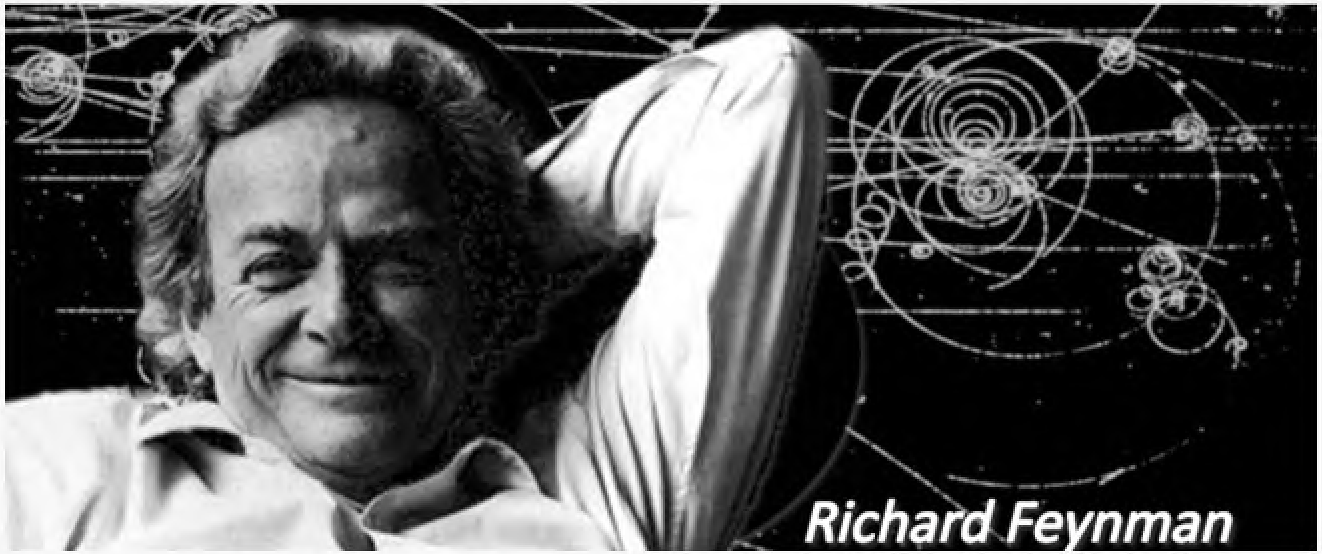
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

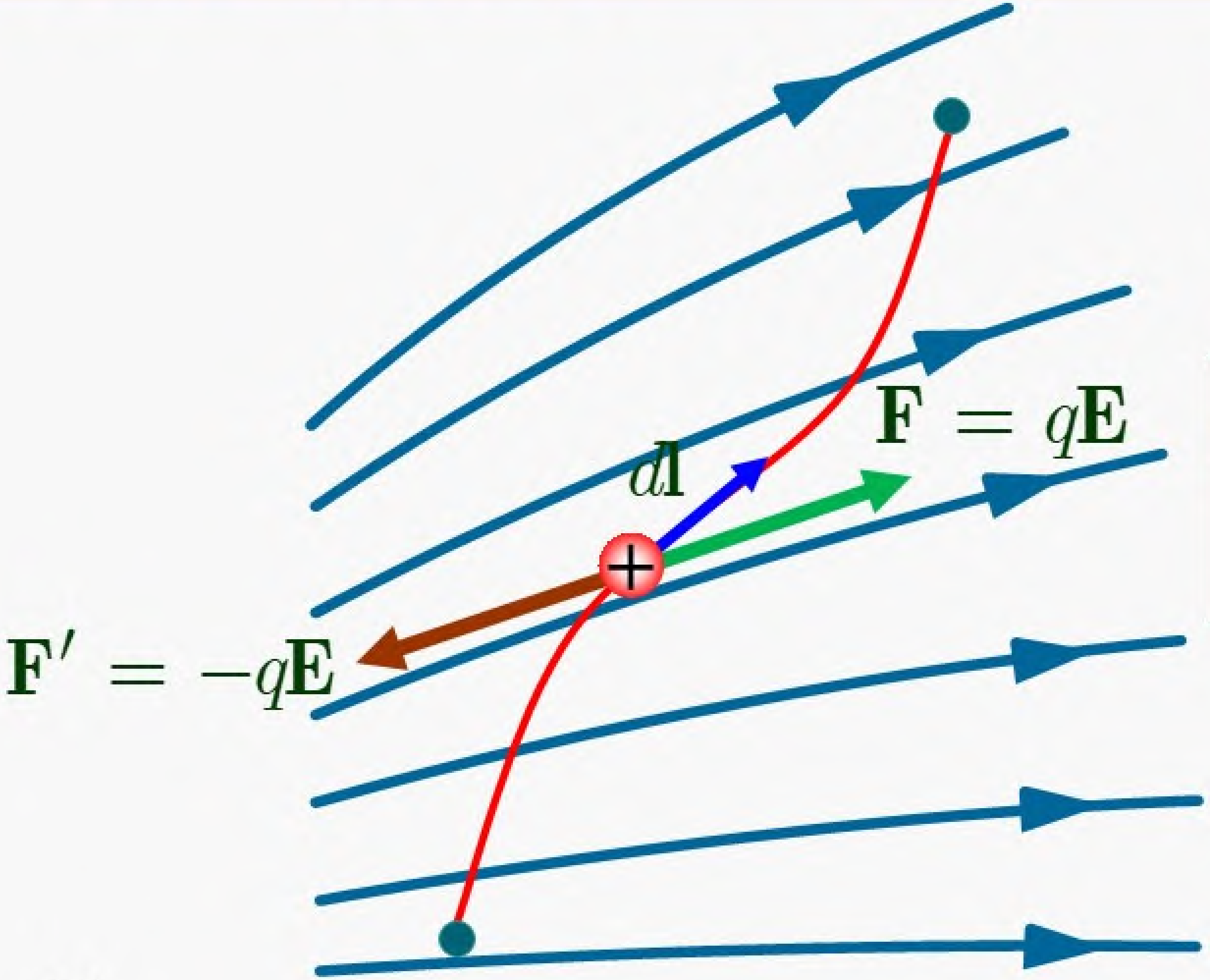
فاینمن

درس سی و یکم

انرژی الکتروستاتیک

Electrostatic Energy

دانشگاه خوارزمی



کار میدان :

$$\boxed{W_E = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = q\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}}$$

کار عامل خارجی :

$$\boxed{\begin{aligned} W_{ext} &= \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}'\cdot d\mathbf{l} = -q\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \\ &= -W_E \end{aligned}}$$

$$\Delta U = U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) = W_{ext} = -W_E$$

$$\frac{\Delta U}{q} = \Delta\Phi$$

$$\boxed{\Delta U = W_{ext} = -W_E = q\Big(\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r}_0)\Big)}$$

فرض کنید می‌خواهیم چند بار نقطه‌ای $q_1, q_2, \cdots, q_N$ را از بی‌نهایت (مرجعِ پتانسیل) به مکان‌های $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$ منتقل کنیم.

$$\boxed{W_1 = 0}$$

$$\boxed{W_2 = q_2 \Phi_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}}$$

$$\boxed{W_3 = q_3\big(\Phi_1(\mathbf{r}_3) + \Phi_2(\mathbf{r}_3)\big) = \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{q_1 q_3}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2 q_3}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|}\right)}$$

$$\boxed{W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{q_1 q_4}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2 q_4}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_3 q_4}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3|}\right)}$$

واضح است که ترتیبِ انتقالِ بارها در کار انجام شده تأثیری ندارد. به بیان دیگر اگر در روابط فوق جای اندیس‌ها را عوض کنیم تغییری ایجاد نخواهد شد. بدین ترتیب می‌توانیم روابطِ فوق را به شکلِ زیر بنویسیم:

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{q_1q_2 + q_2q_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{q_1q_3 + q_3q_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2q_3 + q_3q_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|}\right)$$

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{q_1q_4 + q_4q_1}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2q_4 + q_4q_2}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_3q_4 + q_4q_3}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3|}\right)$$

برای انتقالِ Nامین بار می‌توان نوشت:

$$W_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{q_1q_N + q_Nq_1}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2q_N + q_Nq_2}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_3q_N + q_Nq_3}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_3|} + \cdots + \frac{q_{N-1}q_N + q_Nq_{N-1}}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_{N-1}|}\right)$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_N$$

دانشگاه خوارزمی

$$
\begin{aligned}
W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\Bigg[& q_1\left(\frac{q_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}+\frac{q_3}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|}+\frac{q_4}{|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_1|}+\cdots\frac{q_N}{|\mathbf{r}_N-\mathbf{r}_1|}\right)\\
&+q_2\left(\frac{q_1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}+\frac{q_3}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|}+\frac{q_4}{|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_2|}+\cdots+\frac{q_N}{|\mathbf{r}_N-\mathbf{r}_2|}\right)\\
&+q_3\left(\frac{q_1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|}+\frac{q_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|}+\frac{q_4}{|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_3|}+\cdots+\frac{q_N}{|\mathbf{r}_N-\mathbf{r}_3|}\right)\\
&+\cdots+q_{N-1}\left(\frac{q_1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_{N-1}|}+\frac{q_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_{N-1}|}+\cdots\frac{q_N}{|\mathbf{r}_N-\mathbf{r}_{N-1}|}\right)\\
&+q_N\left(\frac{q_1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_N|}+\frac{q_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_N|}+\cdots\frac{q_{N-1}}{|\mathbf{r}_{N-1}-\mathbf{r}_N|}\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|}
$$

با توجه به این که $j \neq i$ ، در این مجموع هرگز جمله‌ی (N,N) ظاهر نخواهد شد.

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}$$

رابطه‌ی فوق را به شکل زیر نیز می‌توان برحسبِ پتانسیل نوشت:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \Phi(\mathbf{r}_i)$$

$\Phi(\mathbf{r}_i)$ پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی $\mathbf{r}_i$ ناشی از همه‌ی بارها به غیر از بارِ q_i است.

توجه کنید که رابطه‌ی فوق فقط در مورد سیستم‌های بسته صادق است. در صورتی که بارهای الکتریکی در ناحیه‌ای قرار داشته باشند که یک میدان خارجی وجود داشته باشد، انرژیِ کل از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$W = \sum_{i=1}^{N} q_i \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \Phi(\mathbf{r}_i)$$

دانشگاه خوارزمی

کارِ لازم برای ایجادِ یک توزیعِ پیوسته‌ی بار، با تعمیمِ روابط فوق به شکل زیر به دست می‌آید

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int \rho_v(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\, dv}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho_v(\mathbf{r}')}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid}dv'\right)dv = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int\int \frac{\rho_v(\mathbf{r})\rho_v(\mathbf{r}')}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid}dv'dv}$$

و اگر یک توزیع سطحی بار داشته باشیم:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int \sigma_s(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\, da = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int\int \frac{\sigma_s(\mathbf{r})\sigma_s(\mathbf{r}')}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid}\, da'da}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

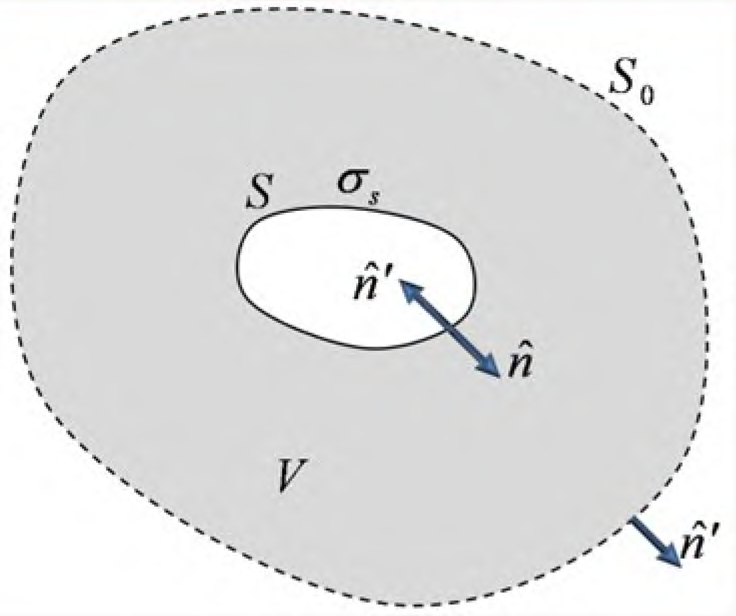
بار Q به طور یکنواخت در حجم یک کره به شعاع R توزیع شده است. انرژی پتانسیل این سیستم بار را حساب کنید.

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\Phi\, dv$$

$$\Phi(r < R) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)$$

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\Phi\, dv = \frac{\rho_0}{2}\int_0^R \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)4\pi r^2 dr$$

$$U = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$



$$U=\frac{1}{2}\int_V \rho_v(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\,dv+\frac{1}{2}\int_S \sigma_s(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\,da$$

حجمِ V ناحیه‌ای است که همه‌ی بارها را در بر می‌گیرد.

$$\rho_v(\mathbf{r})=\nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r})$$

$$U=\frac{1}{2}\int_V \big(\nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r})\big)\Phi(\mathbf{r})dv+\frac{1}{2}\int_S \sigma_s(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\,da$$

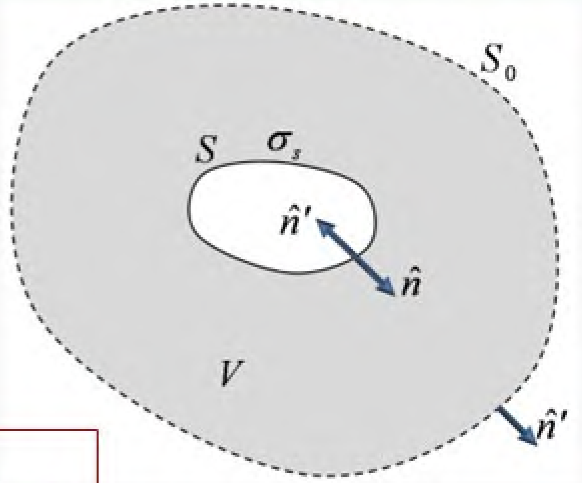
$$\nabla\cdot(\Phi\,\mathbf{D})=(\nabla\Phi)\cdot\mathbf{D}+\Phi\nabla\cdot\mathbf{D}$$

$$U=\frac{1}{2}\int_V \big[\nabla\cdot(\Phi\mathbf{D})-(\nabla\Phi)\cdot\mathbf{D}\big]dv+\frac{1}{2}\int_S \sigma_s(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\,da$$

$$U=\frac{1}{2}\oint_{S+S_0}(\Phi\mathbf{D})\cdot\hat{n}'da+\frac{1}{2}\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,dv+\frac{1}{2}\int_S \sigma_s(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\,da$$

دانشگاه خوارزمی

$$U = \frac{1}{2}\oint_{S+S_0} (\Phi \mathbf{D})\cdot \hat{n}'\, da + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\, dv + \frac{1}{2}\int_S \sigma_s(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\, da$$



$$U = \frac{1}{2}\oint_{S} \Phi \mathbf{D}\cdot \hat{n}'\, da + \frac{1}{2}\oint_{S_0} (\Phi \mathbf{D})\cdot \hat{n}'\, da + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\, dv + \frac{1}{2}\int_S \sigma_s(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\, da$$

$$\sigma_s = \mathbf{D}\cdot\hat{n} \qquad \mathbf{D}\cdot\hat{n}' = -\mathbf{D}\cdot\hat{n} \qquad U = \frac{1}{2}\oint_{S_0} (\Phi \mathbf{D})\cdot \hat{n}'\, da + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\, dv$$

اگر مرزهای سطحِ S_0 را در فواصلِ بزرگِ R در نظر بگیریم، انتگرالِ سطحیِ رابطه‌ی فوق با سرعتِ $1/R$ و یا سریع‌تر، به صفر میل می‌کند. بنابراین اگر ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را به کل فضا گسترش دهیم، می‌توان نوشت:

$$U = \frac{1}{2}\int_{\text{کل فضا}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\, dv$$

دانشگاه خوارزمی

$$U = \frac{1}{2}\int_{\text{کل فضا}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,dv$$

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}$$

$$\boxed{dU = u\,dv}$$

دانشگاه خوارزمی

انرژی الکتروستاتیکی دو بار نقطه‌ای q_1, q_2 که در مکان‌های $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ برابر است با:

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}}$$

واضح است که اگر بارها ناهمنام باشند، این انرژی منفی است.

اما اگر از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم، واضح است که انرژی همواره مقدار مثبتی به دست می‌آید.

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_{\text{کل فضا}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,dv = \frac{1}{2}\epsilon_0\int_{\text{کل فضا}} |\mathbf{E}|^2\,dv}$$

ریشه‌ی این تناقض کجاست؟

میدان الکتریکی ناشی از دو بار نقطه‌ای برابر است با

$$\mathbf{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_\circ}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3}$$

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\epsilon_0\left|\mathbf{E}\right|^2 = \frac{\epsilon_\circ}{32\pi^2\epsilon_0^2}\left[\frac{{q_1}^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^4} + \frac{{q_2}^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^4} + 2q_1q_2\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3}\right]$$

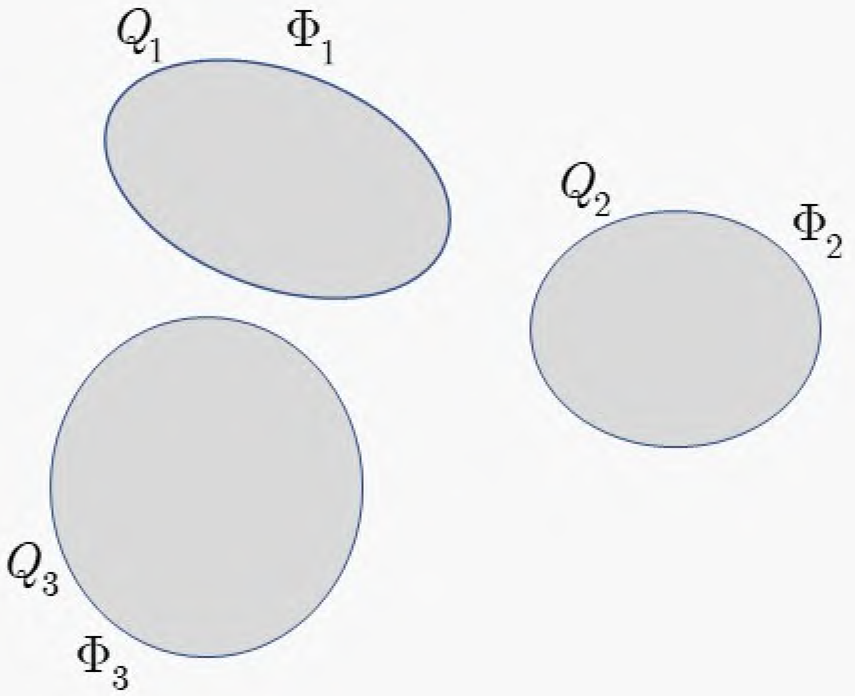
دو جمله‌ی نخست، همان خود-انرژی بارهای نقطه‌ای است. جمله‌ی سوم نیز جمله‌ی برهم‌کنشِ دو بار است.

انرژی الکتروستاتیکی این سیستمِ دو ذره‌ای از همین جمله‌ی برهم‌کنشی به دست می‌آید.

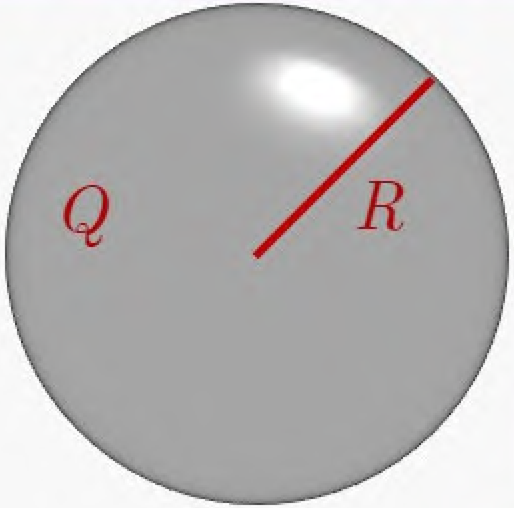
$$U_{\text{int}} = \frac{q_1q_2}{16\pi^2\epsilon_0}\int\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3}dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}$$

دانشگاه خوارزمی

$$U_{\text{رساناهای باردار}} = \frac{1}{2}\int_S \sigma_s \Phi\, da$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i^N \int_{S_i} \sigma_s \Phi_i da$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i^N \Phi_i \int_{S_i} \sigma_s da$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i^N \Phi_i Q_i$$



دانشگاه خوارزمی



بار الکتریکی Q به طور یکنواخت بر سطح یک کره‌ی رسانا به شعاع R توزیع شده است. انرژی الکتریکیِ این دستگاه را حساب کنید

$$\sigma_s = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

روش اول

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_S \sigma_s \Phi \, da \\ &= \frac{1}{2}\int_S \frac{Q}{4\pi R^2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} R^2 d\Omega \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

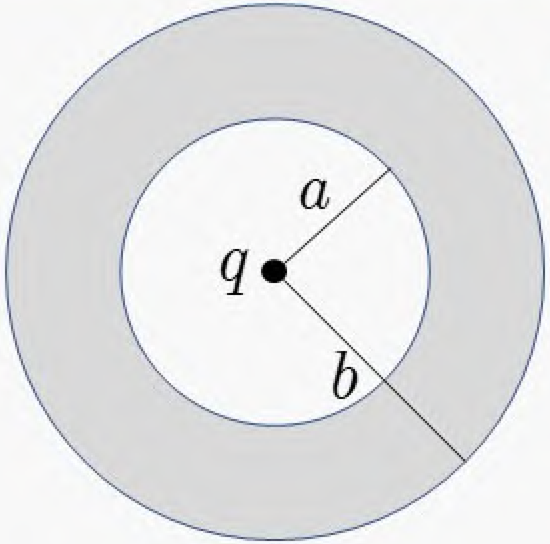
روش دوم

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} \left|\mathbf{E}\right|^2 \, dv \qquad \mathbf{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_\circ}\dfrac{\hat{r}}{r^2} & r > R \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{r<R} \left|\mathbf{E}\right|^2 \, dv + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{r>R} \left|\mathbf{E}\right|^2 \, dv$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_R^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 r^4} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}}$$

دانشگاه خوارزمی



بار الکتریکی q در مرکز پوسته ی کروی رسانایی قرار دارد. شعاع داخلی پوسته a و شعاع خارجی b است. انرژی الکتروستاتیکی را محاسبه کنید.

با استفاده از قانون گوس میدان الکتریکی به دست می‌آید

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2} & r < a \\ 0 & a < r < b \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2} & r > b \end{cases}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} \left|\mathbf{E}\right|^2 dv - \text{خودانرژی بار نقطه‌ای}}$$

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_0^a \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_b^\infty \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr - \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_0^\infty \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_b^\infty \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr - \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_a^\infty \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$U = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی