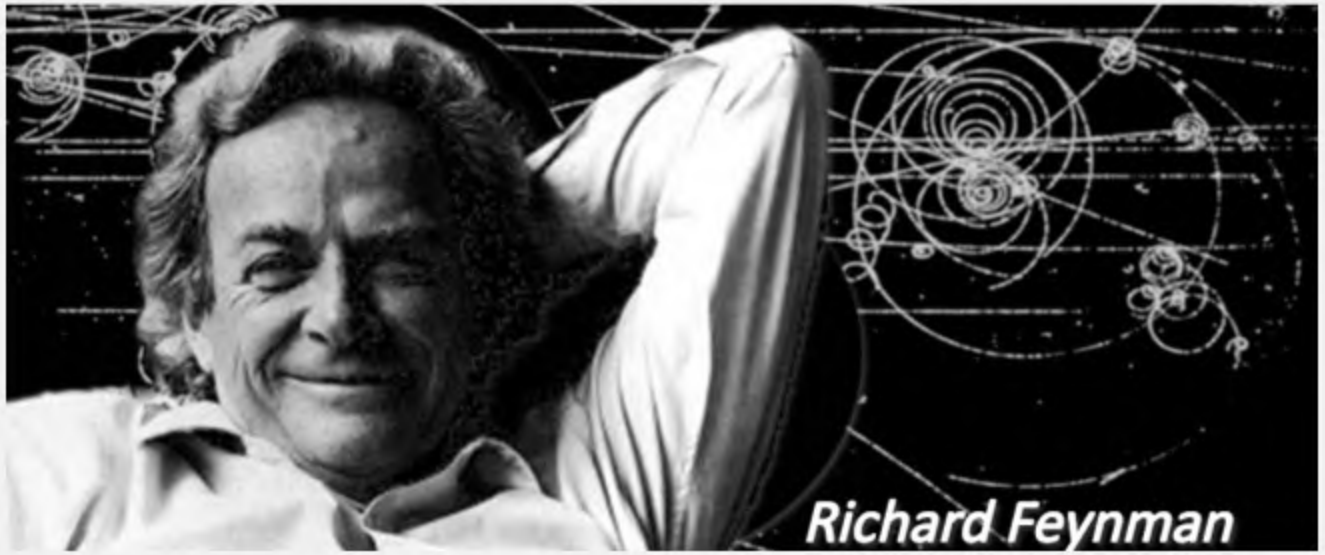
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را
به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

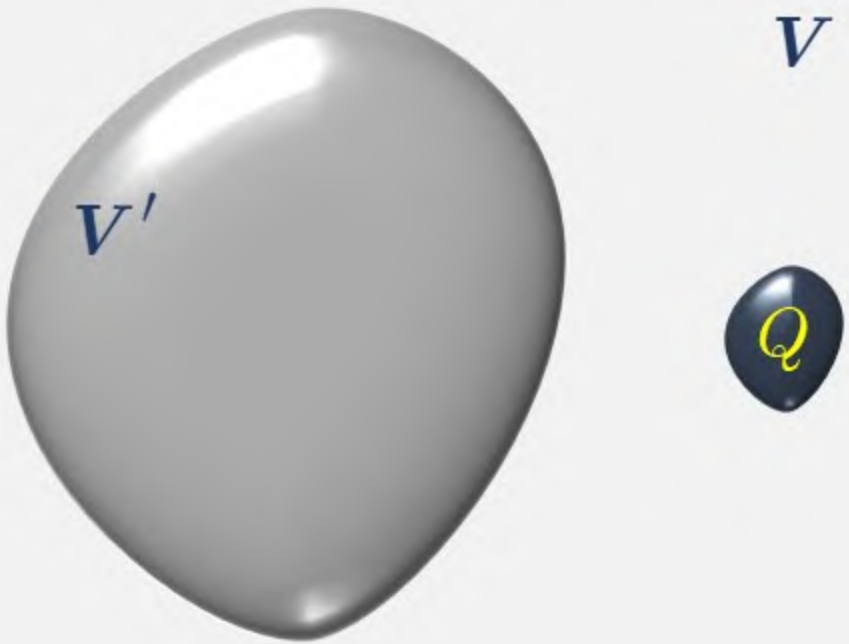
فاینمن

درس بیست و هشتم

روش تصویر- بخش ۱

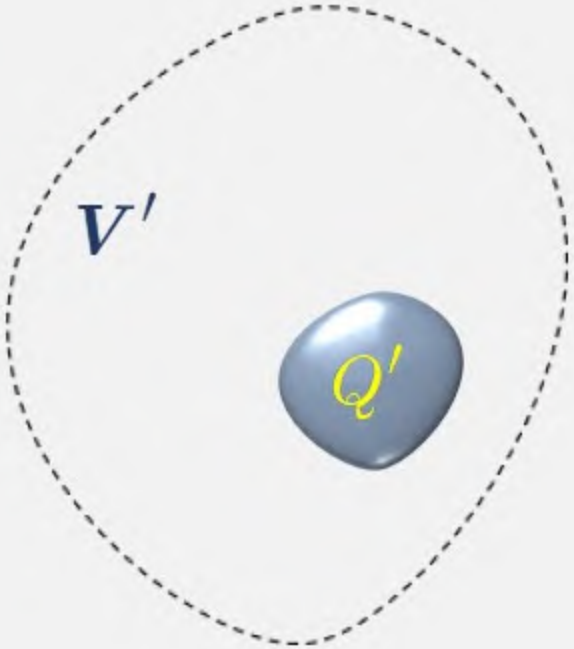
Image Method-Part1

برخی مسائل الکتروستاتیک شامل بارهای الکتریکی و سطوح مرزی هستند. سطوح مرزیِ محدود کننده (که در این‌جا آن‌ها را رسانا در نظر می‌گیریم) فضا را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. یکی از این نواحی را V و دیگری را V' می‌نامیم. فرض می‌کنیم بارهای الکتریکی در ناحیه‌ی V هستند. هدف پیدا کردنِ پتانسیلِ الکتریکی در ناحیه‌ی V است. در روشی که روشِ تصویر نامیده می‌شود، مسئله را با یک مسئله‌ی جدید شبیه‌سازی می‌کنیم؛ فرض می‌کنیم مرزی وجود ندارد و در ناحیه‌ی V' توزیعی از بارهای الکتریکی قرار می‌دهیم به گونه‌ای که شرایطِ مرزیِ مسئله‌ی اصلی برقرار شود. این بارها را بارهای تصویری می‌نامیم. طبق قضیه‌ی یکتایی، پتانسیلِ ناشی از این بارهای تصویری و بارهای واقعی، پاسخِ مسئله‌ی اصلی در ناحیه‌ی V است.



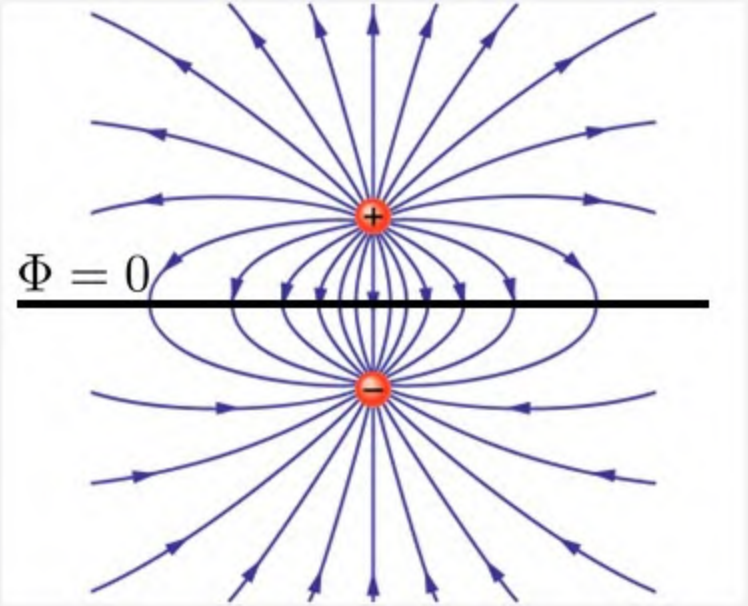
V

Q

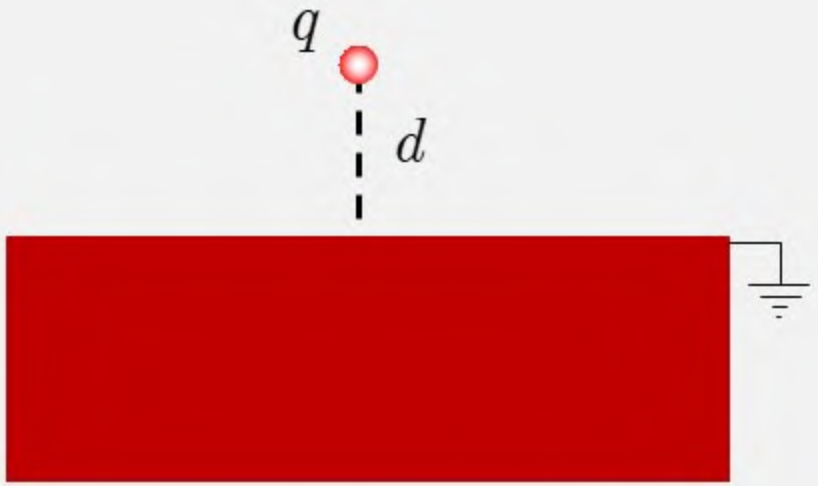


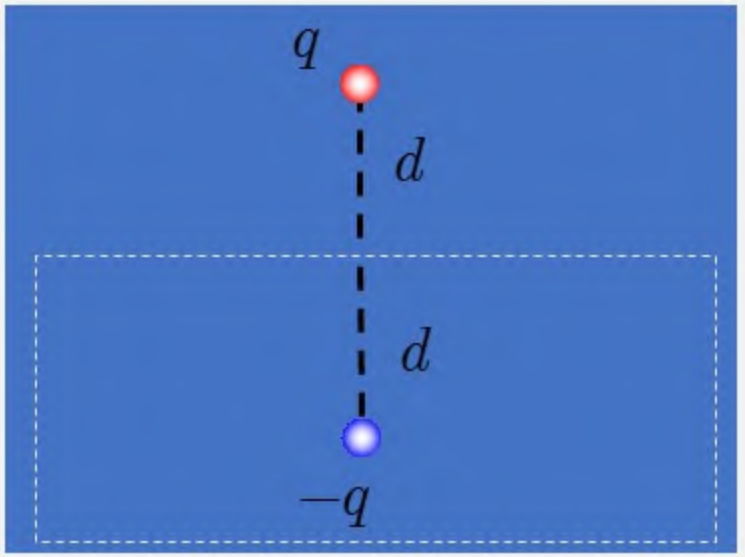
V

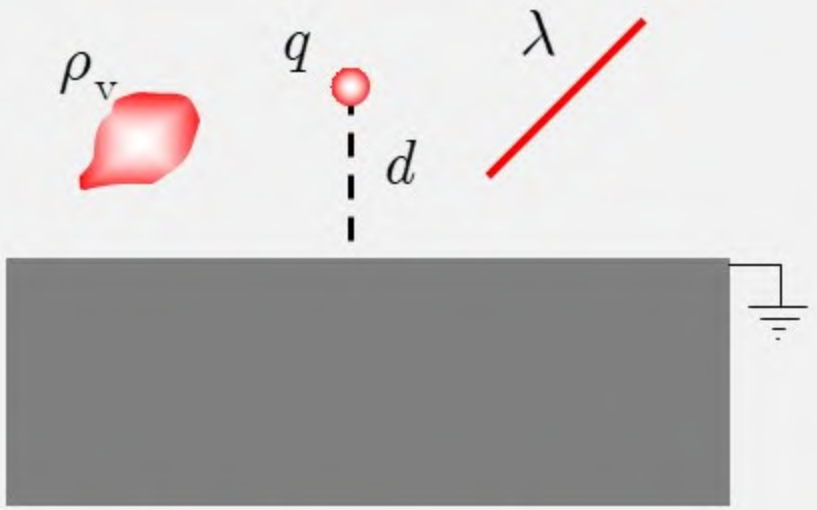
Q

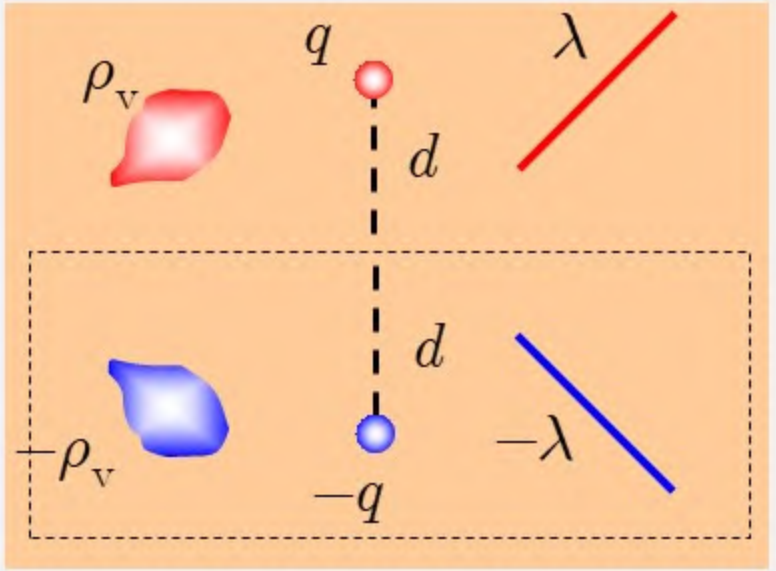

$\Phi = 0$

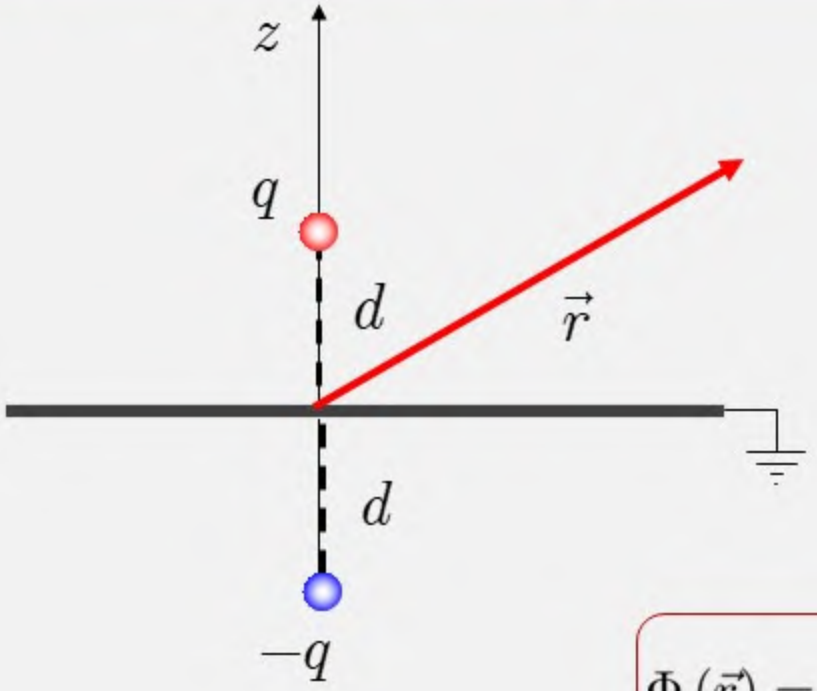
دیواره‌ی تخت رسانا


q
d


q
d
d
−q


ρv
q
λ
d


ρv
q
λ
d
d
−ρv
−q
−λ



بار نقطه‌ای q در مجاورت صفحه‌ی تخت رسانا که به زمین وصل شده، در فاصله‌ی d قرار دارد.

الف) چگالی بار سطحی رسانا را پیدا کنید.

ب) چه نیروی از طرف صفحه به بار نقطه‌ای وارد می‌شود؟

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r}-d\hat{e}_z|}+\frac{-q}{|\vec{r}+d\hat{e}_z|}\right), \qquad z \geq 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-d\hat{e}_z}{|\vec{r}-d\hat{e}_z|^{3/2}}-\frac{\vec{r}+d\hat{e}_z}{|\vec{r}+d\hat{e}_z|^{3/2}}\right), \qquad z \geq 0$$

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + (z-d)\hat{e}_z}{|x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + (z-d)\hat{e}_z|^3} - \frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + (z+d)\hat{e}_z}{|x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + (z+d)\hat{e}_z|^3}\right), \qquad z \geq 0$$

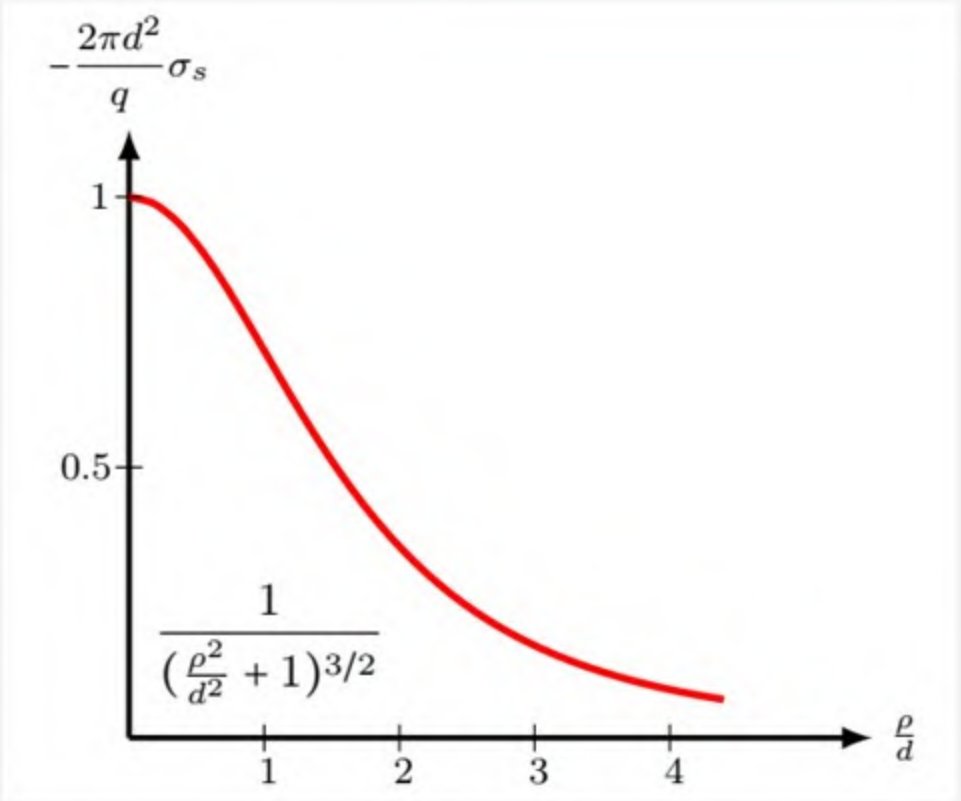
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\rho\hat{e}_\rho + (z-d)\hat{e}_z}{|\rho\hat{e}_\rho + (z-d)\hat{e}_z|^3} - \frac{\rho\hat{e}_\rho + (z+d)\hat{e}_z}{|\rho\hat{e}_\rho + (z+d)\hat{e}_z|^3}\right), \qquad z \geq 0$$

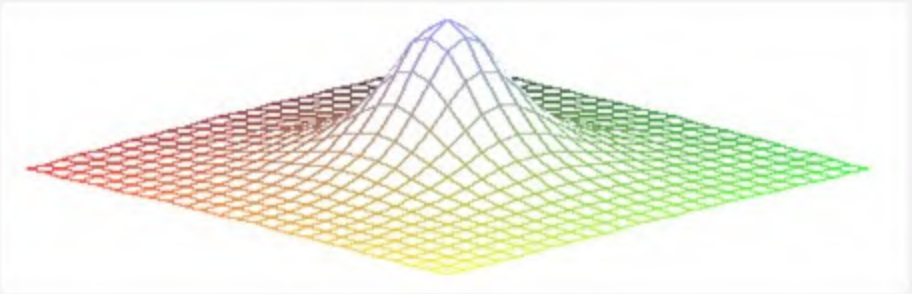
$$\sigma = \epsilon_0\left(\vec{E}\cdot\hat{e}_z\right)\Big|_{z=0}$$

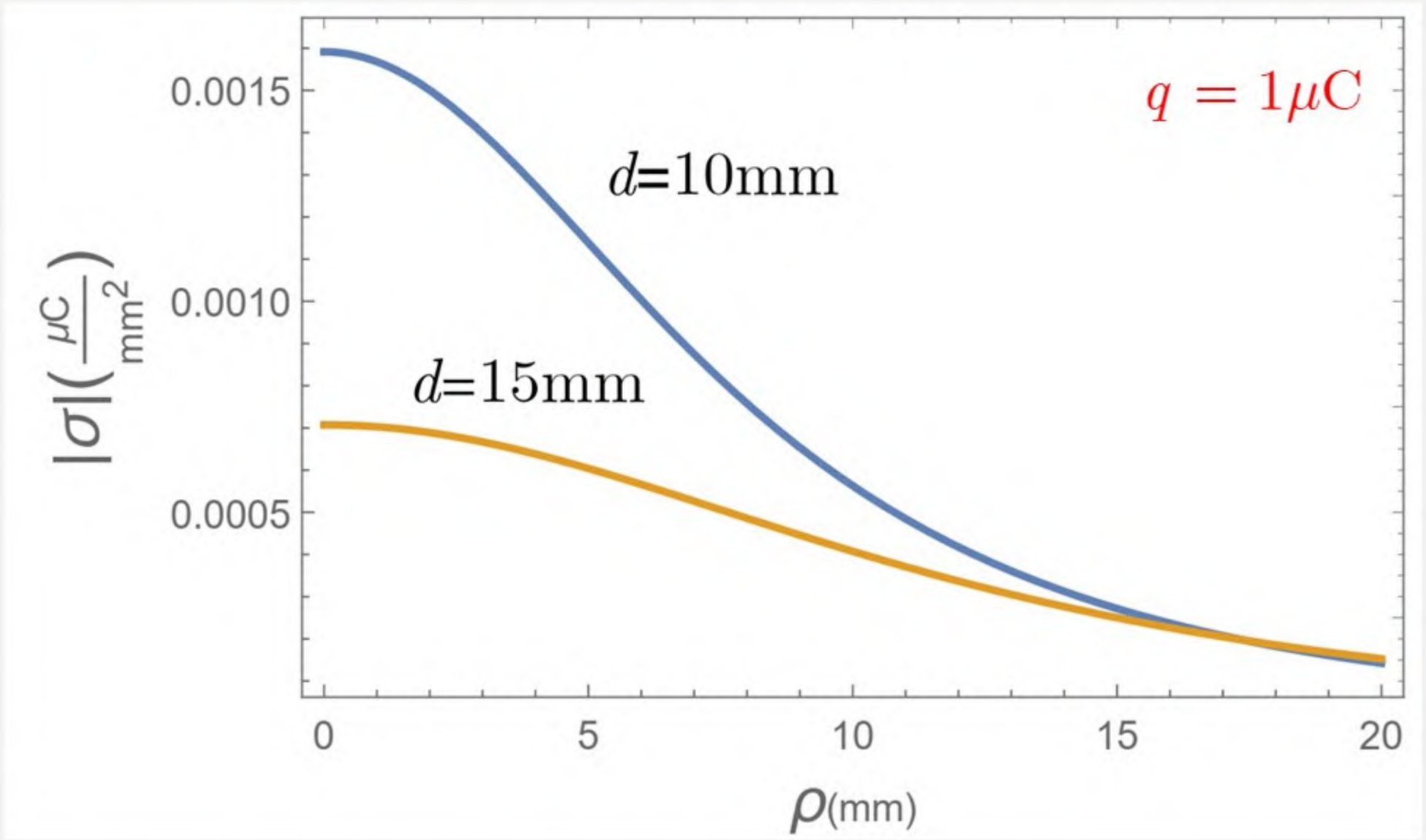
$$\sigma = \epsilon_0\vec{E}\cdot\hat{e}_z\Big|_{z=0} = \frac{q}{4\pi}\left(\frac{\rho\hat{e}_\rho + (z-d)\hat{e}_z}{|\rho\hat{e}_\rho + (z-d)\hat{e}_z|^3} - \frac{\rho\hat{e}_\rho + (z+d)\hat{e}_z}{|\rho\hat{e}_\rho + (z+d)\hat{e}_z|^3}\right)\cdot\hat{e}_z$$

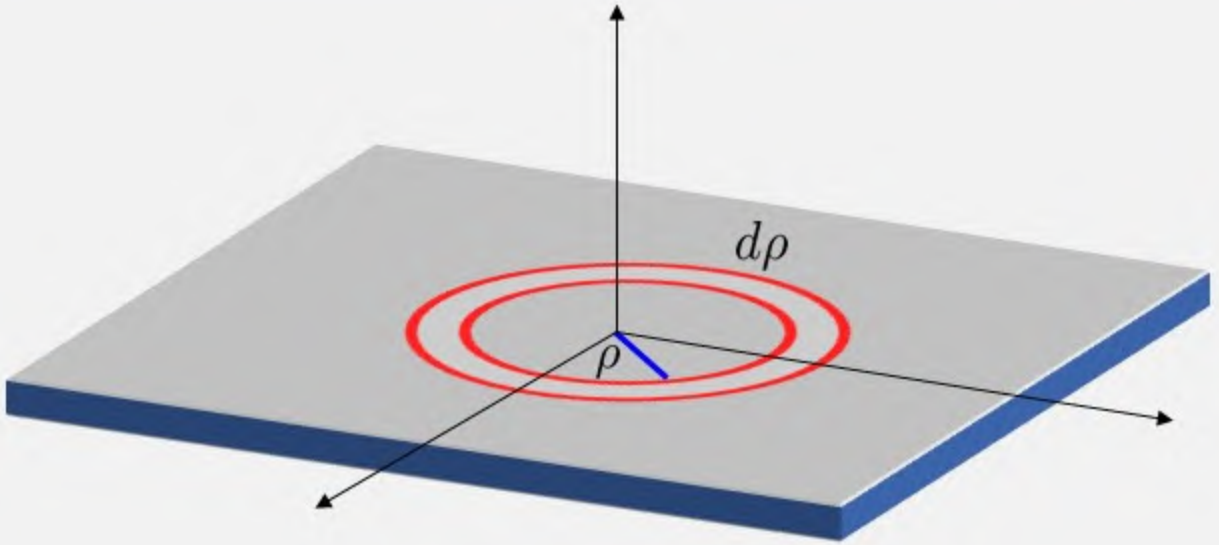
$$\sigma = \epsilon_0\vec{E}\cdot\hat{e}_z\Big|_{z=0} = \frac{-q}{2\pi}\frac{d}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{e}_z \Big|_{z=0} = \frac{-q}{2\pi} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

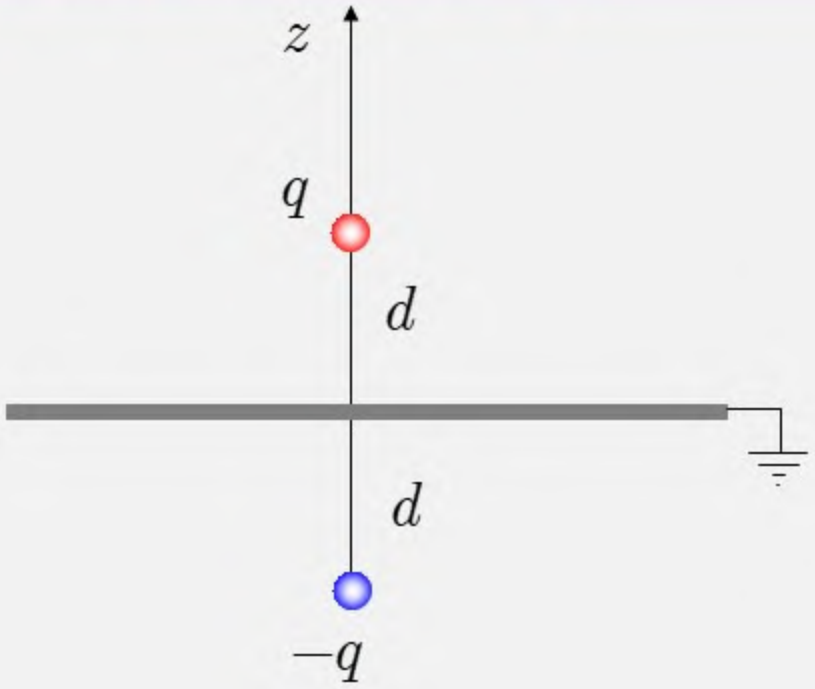





$q = 1\mu C$
d=10mm
d=15mm
0.0015
0.0010
0.0005
$|\sigma|(\frac{\mu C}{mm^2})$
0
5
10
15
20
ρ(mm)



$$Q = \int \sigma da = \frac{-qd}{2\pi} \int_0^\infty \frac{2\pi\rho d\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} = -q$$



نیرویی که صفحه به بار نقطه‌ای مجاورش وارد می‌کند:

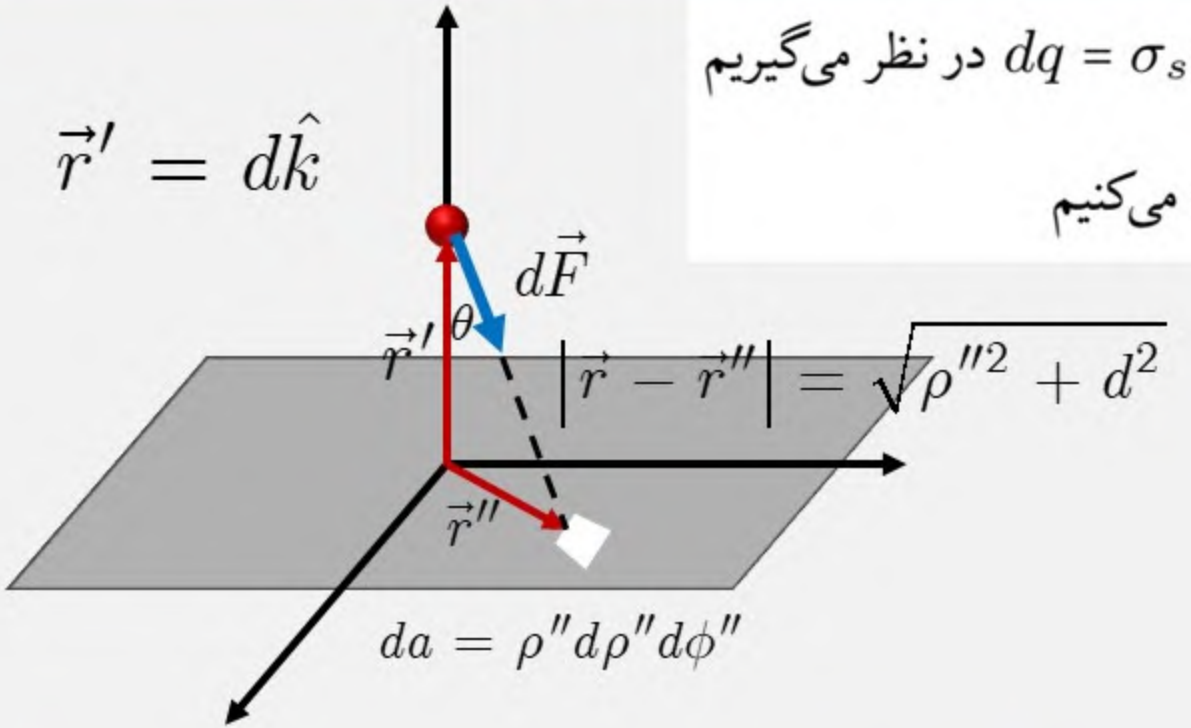
روش اول: نیروی بین دو بارِ نقطه‌ای

$$\vec{F} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(2d)^2}\hat{e}_z$$

روش دوم: انتگرال گیری.....

در روش دیگر بارهای روی صفحه را به صورت عناصر کوچک $dq = \sigma_s da$ در نظر می‌گیریم

و با استفاده از اصل برهم‌نهی نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q را محاسبه می‌کنیم

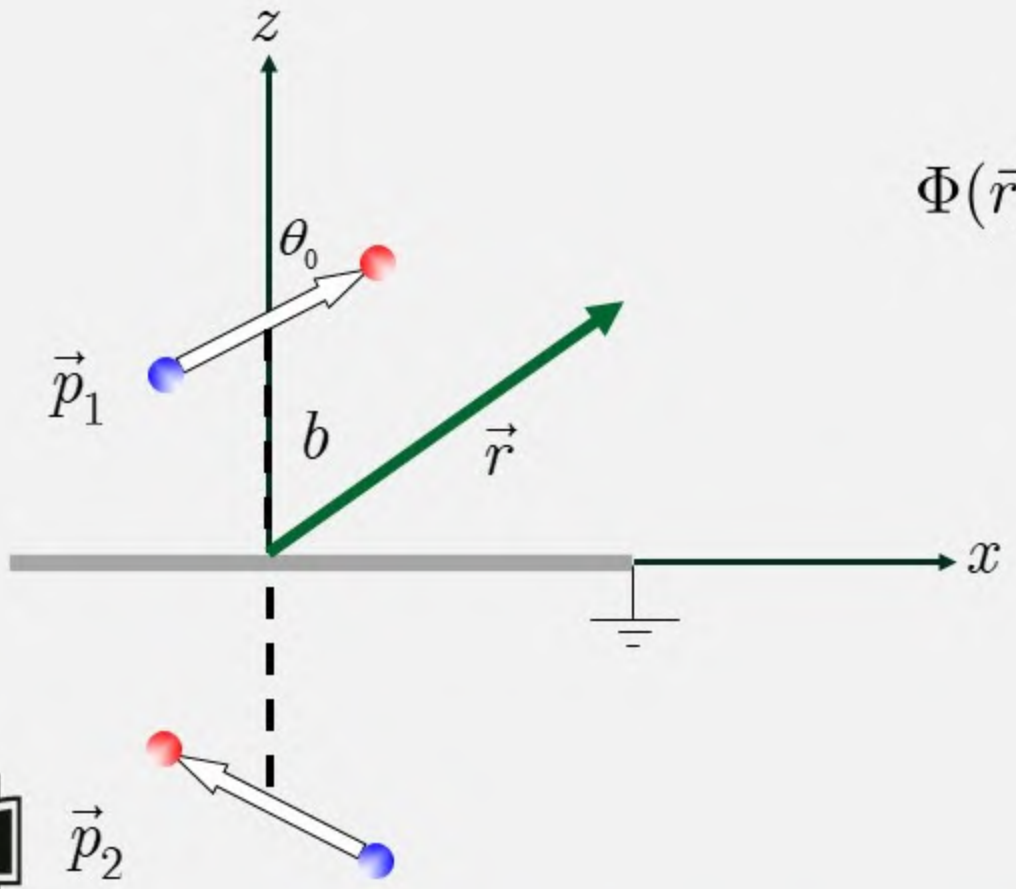


$$F_x = \int dF_x = 0\,; \quad F_y = \int dF_y = 0$$

$$\begin{aligned}
F_z &= \int dF_z \\
&= \int dF\cos\theta \\
&= \int \frac{q\sigma_s da}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{\left(\rho''^2 + d^2\right)^{3/2}} \\
&= -\frac{q^2 z'^2}{8\pi^2\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\rho'' d\rho'' d\phi''}{\left(\rho''^2 + d^2\right)^3} \\
&= -\frac{q^2 z'^2}{8\pi^2\epsilon_0}\frac{2\pi}{4d^4} \\
&= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4d^2}
\end{aligned}$$

$$\vec{p}_1 = p\cos\theta_0\hat{e}_z + p\sin\theta_0\hat{e}_x$$

$$\vec{p}_2 = p\cos\theta_0\hat{e}_z - p\sin\theta_0\hat{e}_x$$



$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}_1\cdot(\vec{r}-b\hat{e}_z)}{|\vec{r}-b\hat{e}_z|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}_2\cdot(\vec{r}+b\hat{e}_z)}{|\vec{r}+b\hat{e}_z|^3}$$

سؤال: چه نیرویی به صفحه وارد می‌شود؟
فرض کنید $\theta_0 = 0$

$$\vec{F} = \vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}\vec{E}_1\Big|_{(0,0,-b)}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3\left(\vec{r}-b\hat{e}_z\right)\cdot\vec{p}_1}{\left|\vec{r}-b\hat{e}_z\right|^5}\left(\vec{r}-b\hat{e}_z\right) - \frac{\vec{p}_1}{\left|\vec{r}+b\hat{e}_z\right|^3}\right)$$

$$\vec{F} = \vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}\vec{E}_1\Big|_{(0,0,-b)} = -\frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0 b^4}\hat{e}_z$$

شاد و مهربان باشید