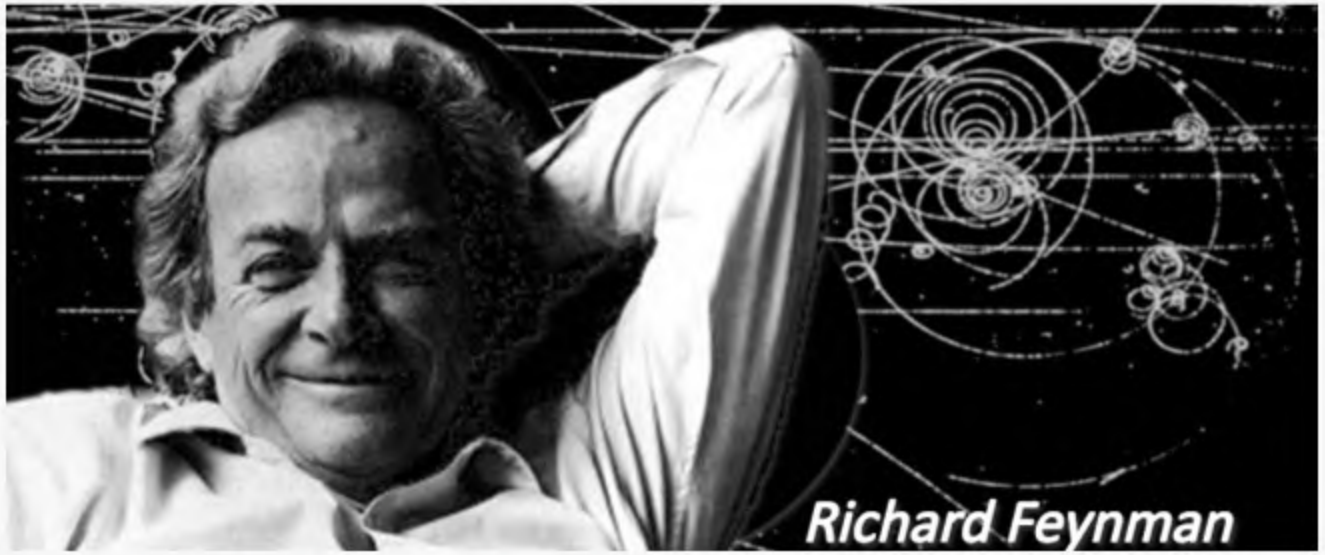
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را
به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس سی و سوم

نیروها و گشتاورهای نیروها

Forces and Torques

در بسیاری موارد محاسبه‌ی نیروی وارد بر توزیع‌های بار، با استفاده از قانونِ کولن، چندان ساده نیست. گاهی مناسب‌تر است که انرژیِ سیستم را بر حسبِ پارامترهای فیزیکی محاسبه کنیم و با استفاده از آن نیرو یا گشتاورِ نیروی وارد بر توزیع‌های بار را حساب کنیم.

دو حالت را در نظر می‌گیریم: یک حالت وقتی که سیستم، ایزوله (منفرد) است. یعنی بارِ کلِ سیستم ثابت می‌ماند. و حالتِ دوم وقتی که پتانسیل ثابت باشد.

حالت اول: بارِ سیستم ثابت است

حالت دوم: پتانسیل ثابت است

حالت اول: بارِ سیستم ثابت است

فرض کنید F نیروی الکتروستاتیکی باشد. کارِ این نیرو برای جابجایی برای جابجایی dl برابر است با $\mathbf{F}.d\mathbf{l}$

این کار انرژی سیستم را به اندازه‌ی dU تغییر می‌دهد:

$$\begin{aligned} dU &= -dW \\ &= -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} \\ &= -F_x dx - F_y dy - F_z dz \end{aligned}$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \nabla U \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{F} = -\nabla U\Big|_Q$$

$$F_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_Q ; \qquad F_y = -\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_Q ; \qquad F_z = -\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_Q$$

در صورتی که سیستم مقید باشد حول محوری بچرخد، کار نیروی الکتروستاتیکی را می توان به شکل $dW = -\tau d\theta$ نوشت

$$dU = -dW = -\tau d\theta$$

$$\tau = -\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_Q$$

حالت دوم: پتانسیل ثابت است

فرض کنید سیستم ایزوله نیست و بار الکتریکی مجاز است که به سیستم وارد و یا از آن خارج شود به گونه‌ای که پتانسیل ثابت بماند. مجموعه‌ای از رساناها که توسط باتری‌هایی در پتانسیل ثابت قرار دارند، توصیف کننده‌ی چنین حالتی هستند. در صورتی که جابجایی‌ای در سیستم ایجاد شود پایستگی انرژی ایجاب می کند که:

$$dU = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} + dW_b$$

که در آن dW_b کاری است که باتری به منظور ثابت نگه داشتنِ پتانسیل انجام می‌دهند. باتری با تغییر بارِ رسانای iام به اندازه‌ی dQ_i پتانسیل آن را ثابت نگه می دارد. بنابر این کار باتری را می توان به شکل زیر نوشت:

$$dW_b = \sum_i dQ_i\Phi_i$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i\Phi_i \quad \rightarrow \quad U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} dQ_i\Phi_i$$

$$dW_b = 2dU$$

حالت دوم: پتانسیل ثابت است

$$dU = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} + dW_b$$

$$dW_b = 2dU$$

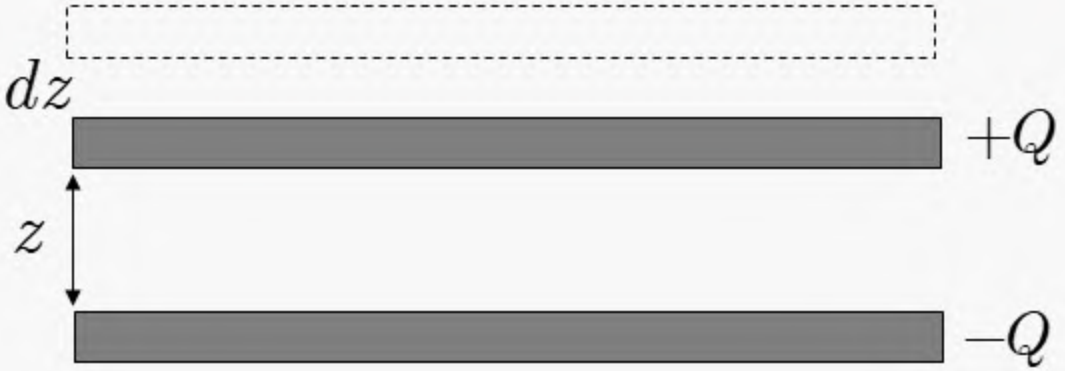
$$dU = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} + 2dU \Rightarrow dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$$ در پتانسیل ثابت

$$F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_\Phi ; \qquad F_y = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_\Phi ; \qquad F_z = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_\Phi$$

و با استدلال مشابه دیده می‌شود که:

$$\tau = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_\Phi$$

نیرویی که صفحات خازن تخت به هم وارد می کنند:



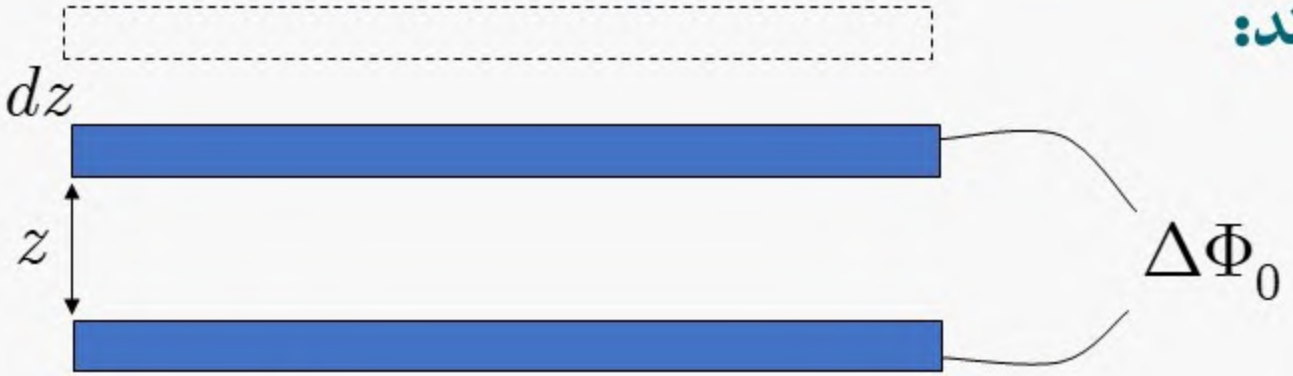
الف) در حالت بار ثابت

$$C = \frac{\epsilon_0 \mathrm{A}}{z}$$

$$F_z = -\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_Q = -\frac{1}{2}Q^2 \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{1}{2}Q^2 \frac{1}{\mathrm{A}\epsilon_0}$$

نیرویی که صفحات خازن تخت به هم وارد می کنند:

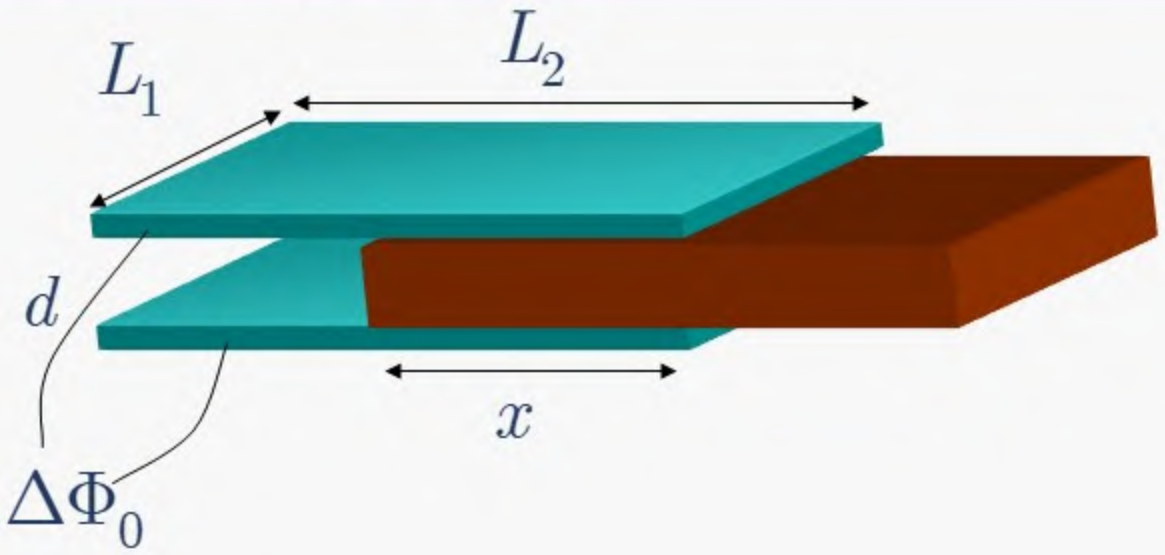
ب) در حالت پتانسیل ثابت



$$C = \frac{\epsilon_0 \mathrm{A}}{z}$$

$$F_z = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_\Phi = \frac{1}{2}\left(\Delta\Phi_0\right)^2 \frac{dC}{dz} = \frac{1}{2}\left(\Delta\Phi_0\right)^2 \left(\frac{-\mathrm{A}\epsilon_0}{z^2}\right)$$

$$F_z = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_\Phi = \frac{1}{2}\left(\Delta\Phi_0\right)^2 \frac{C^2}{\mathrm{A}\varepsilon_0} = -\frac{Q^2}{2\mathrm{A}\epsilon_0}$$



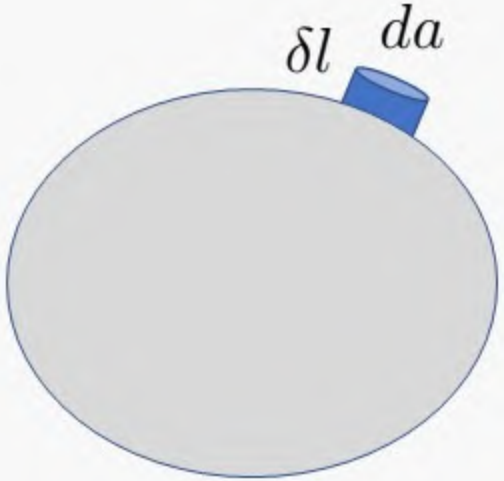
$$C_1 = \frac{\epsilon L_1 x}{d}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 L_1 (L_2 - x)}{d}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{L_1}{d}\left[\epsilon_0 L_2 + \left(\epsilon - \epsilon_0\right) x\right]$$

$$U = \frac{1}{2} C \left(\Delta\Phi_0\right)^2$$

$$\vec{F} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{\Phi} \hat{c}_x = \frac{1}{2}\frac{L_1}{d}\left(\Delta\Phi_0\right)^2 \left(\epsilon - \epsilon_0\right) \hat{c}_x$$



در نزدیکی سطح رسانا چگالی انرژی برابر است با

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

اگر یک عنصر سطح کوچک da را به اندازه‌ی δl جابجا کنیم، کاهش انرژی الکتروستاتیکی سیستم برابر است با

$$\delta U = -u dv = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} da\delta l$$

این نیرو در هر نقطه بر سطح رسانا عمود است:

$$dF = -\frac{\delta U}{\delta l} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} da$$

نیروی وارد بر هر نقطه از سطح رسانا در واحد سطح برابر است با

$$\frac{dF}{da} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

شاد و مهربان باشید