

Fundamentals of Physics II

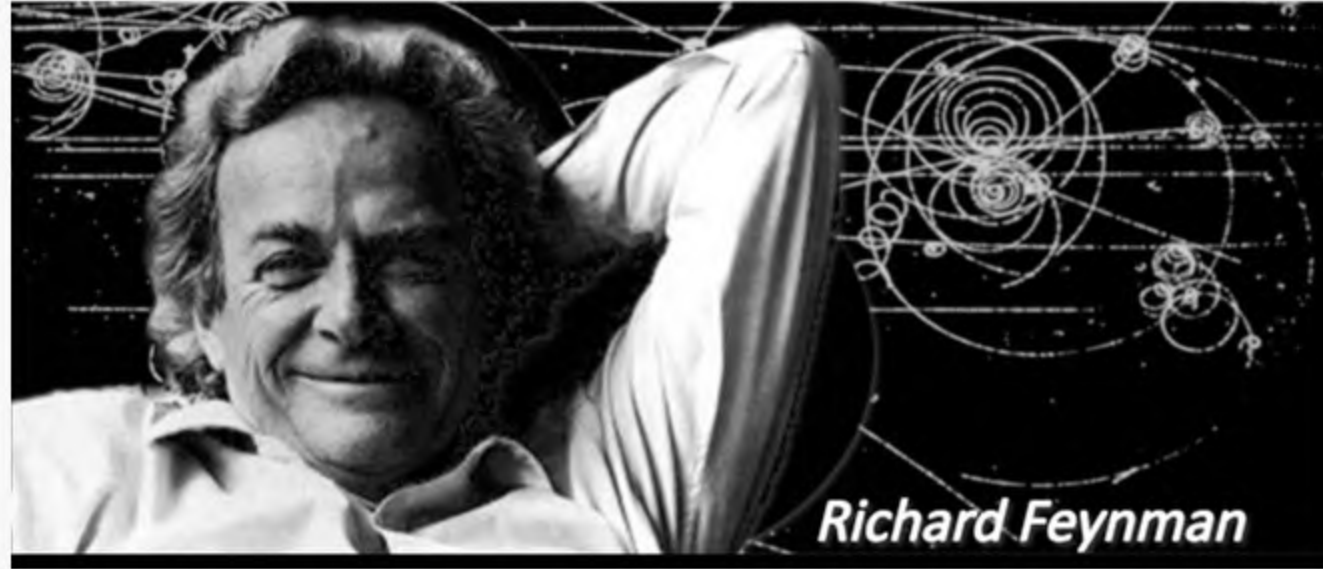
Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی





اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را
به دست می آورید که تا کنون کسب کرده اید

فاینمن

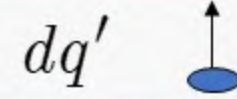


درس بیست و سوم

چگالی انرژی الکتریکی

Electric Energy Density



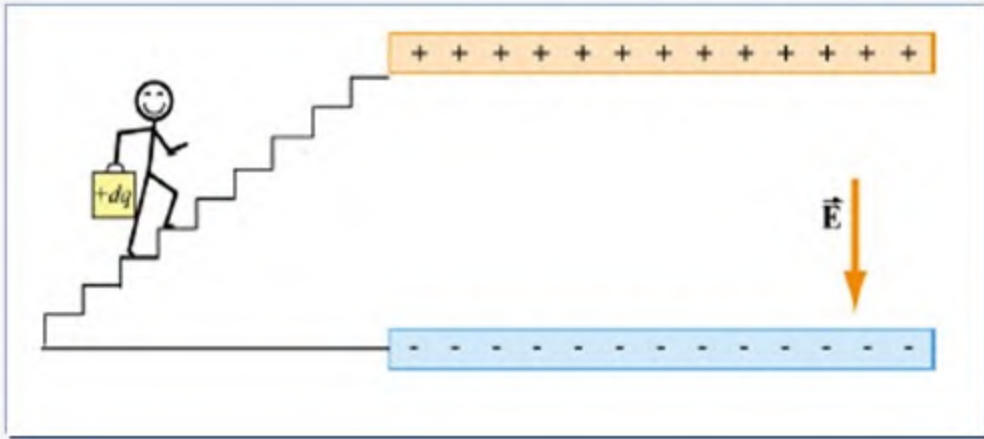


$$dW = (dq') \Delta V = (dq') \frac{q'}{C}$$

$$W = \frac{1}{C} \int_0^q q' dq' = \frac{q^2}{2C}$$

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV$$

$$U = \frac{q^2 d}{2\epsilon_0 A} \quad \text{انرژی الکتریکی خازن تخت}$$



$$u = \frac{dU}{dv} \quad \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \quad \text{تعریف چگالی انرژی}$$

$$u = \frac{U}{v}$$

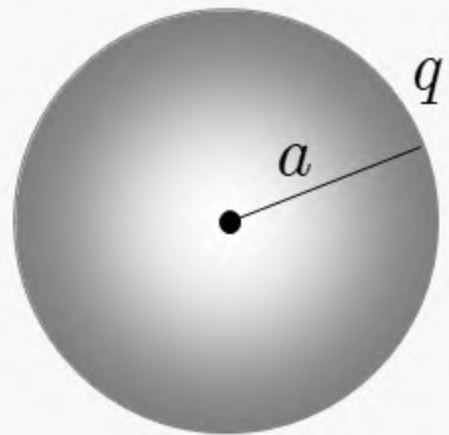
در مورد خازن تخت چون میدان الکتریکی یکنواخت است
رابطه‌ی فوق را می‌توان به صورت روبرو نوشت:

$$\Rightarrow u = \frac{U}{v} = \frac{\frac{q^2 d}{2\epsilon_0 A}}{Ad} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon_0 A^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

این رابطه اگرچه برای خازن تخت (برای میدان یکنواخت) به دست آمد، اما همه جا
برقرار است. در هر ناحیه‌ای از فضا که میدان الکتریکی وجود دارد، انرژی در واحد
حجم از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.



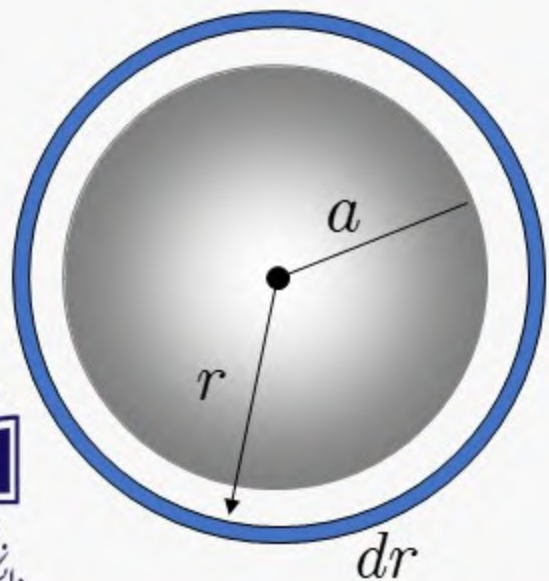


$$U = \frac{q^2}{2C}$$

کره‌ی رسانایی دارای بار الکتریکی q است. الف) انرژی الکتریکی کل فضا را پیدا کنید.
ب) تا چه شعاعی نصف انرژی کل ذخیره شده است.

الف) روش اول:

$$C = 4\pi\epsilon_0 a \Rightarrow U = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$



$$U = \int u dv = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dv$$

الف) روش دوم:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad dv = 4\pi r^2 dr$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

(ب)

$$U_{\infty} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

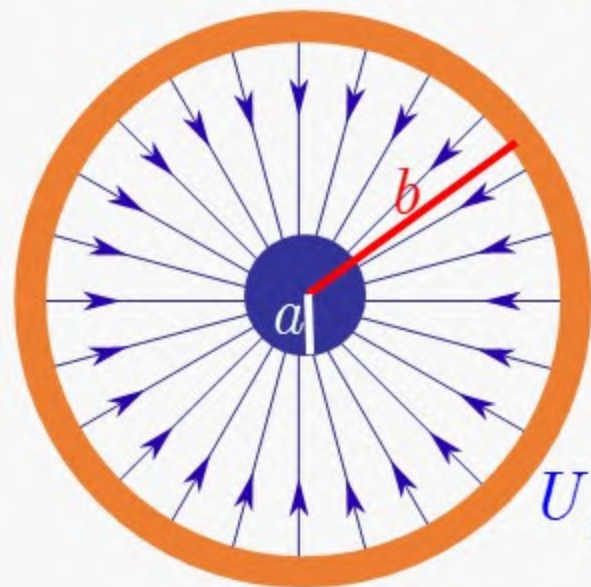
$$U_{R_0} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{R_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R_0} \right)$$

$$U_{R_0} = \frac{1}{2} U_{\infty} \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{2a}$$

$$R_0 = 2a$$



یک خازن کروی دارای شعاع داخلی a و خارجی b و بار آن Q است. تا چه شعاعی نصف انرژی کل این خازن انبار شده است؟



$$E = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$U_{tot} = \int_a^b u dv = \int_a^b \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr$$

$$U_{tot} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

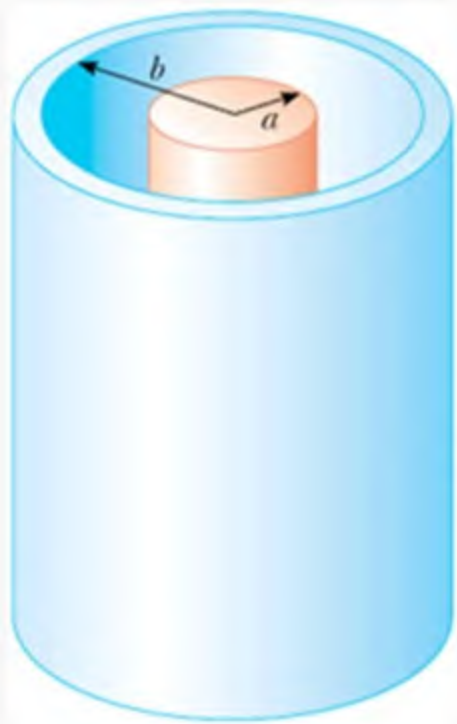
$$U_{R_0} = \int_a^{R_0} u dv = \int_a^{R_0} \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R_0} \right)$$

$$U_{R_0} = \frac{1}{2} U_{tot}$$

$$R_0 = \frac{2ab}{a+b}$$



یک خازن استوانه‌ای دارای شعاع داخلی a و خارجی b و بار آن Q است. تا چه شعاعی نصف انرژی کل این خازن انبار شده است؟



$$E = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0 L^2 r^2} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

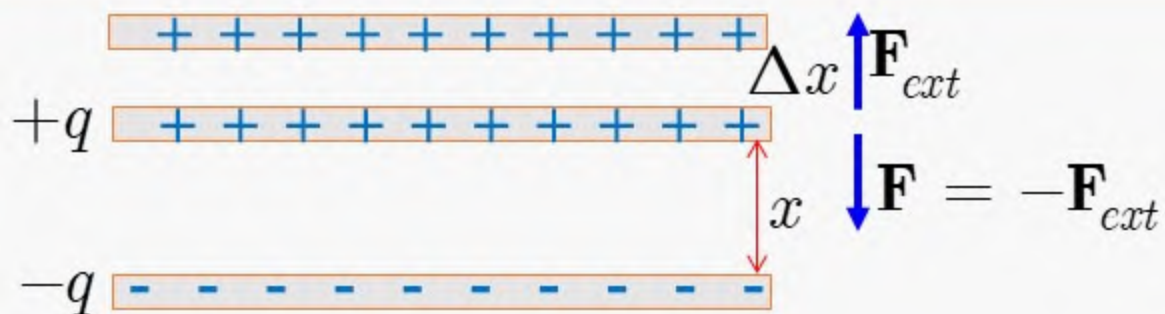
$$U_{tot} = \int_a^b u dv = \int_a^b \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0 L^2 r^2} 2\pi r L dr$$

$$U_{tot} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}$$

$$U_{R_0} = \int_a^{R_0} u dv = \int_a^{R_0} \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0 L^2 r^2} 2\pi r L dr = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_0}{a}$$

$$U_{R_0} = \frac{1}{2} U_{tot}$$

$$R_0 = \sqrt{ab}$$



$$W_{ext} = F_{ext} \Delta x = -F \Delta x$$

وقتی که بار ثابت است

$$W_{ext} = \Delta U$$

$$F = - \left. \frac{\Delta U}{\Delta x} \right|_{q=\text{constant}}$$

$$U_1 = \frac{q^2}{2C_1} = \frac{q^2 x}{2\epsilon_0 A} \quad \text{نیروی بین صفحات خازن تخت.}$$

الف) بار ثابت

$$U_2 = \frac{q^2}{2C_2} = \frac{q^2 (x + \Delta x)}{2\epsilon_0 A}$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{q^2 \Delta x}{2\epsilon_0 A}$$

$$F = - \frac{\Delta U}{\Delta x} = - \frac{q^2}{2\epsilon_0 A} \quad \text{علامت منفی بیان گر جاذبه بودن نیرو است.}$$

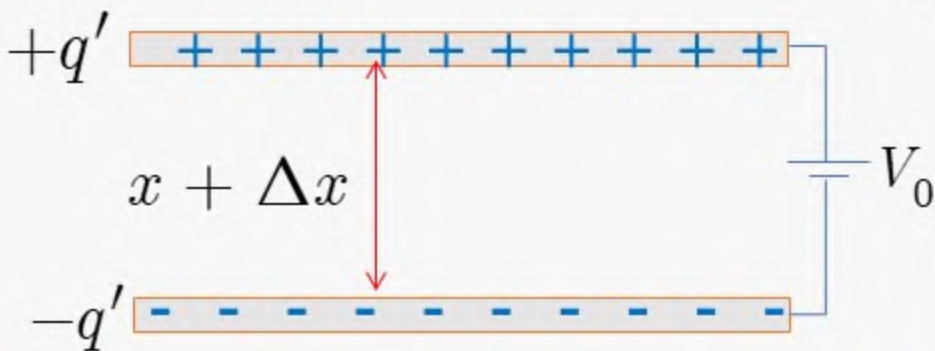
$$\left| \frac{F}{A} \right| = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

از سوی دیگر قبلا دیدیم که میدان الکتریکی در خازن تخت برابر است با



نیروی بین صفحات خازن تخت.

(ب) پتانسیل ثابت



$$\Delta U = W_{ext} + W_b$$

$$\Delta U = -F \Delta x + \Delta q V_0$$

$$\Delta q = (C_2 - C_1)V_0$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}(C_2 - C_1)V_0^2$$

در این حالت باید توجه کرد که برای ثابت ماندن پتانسیل، باتری بر روی سیستم کار انجام می‌دهد و تغییر انرژی سیستم برابر با کار باتری به علاوه‌ی کار عامل خارجی است

$$F \Delta x = -\Delta U + \Delta q V_0 = \frac{1}{2}(C_2 - C_1)V_0^2$$

$$C_2 - C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{x + \Delta x} - \frac{\epsilon_0 A}{x} = \frac{\epsilon_0 A}{x} \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{-1} - 1 \right)$$

$$C_2 - C_1 = -\frac{\epsilon_0 A}{x} \frac{\Delta x}{x}$$

$$F = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{x^2} V_0^2$$



شاد و مهربان باشید

