

شماره‌ی تکلیف: ۳

مسئله‌ی ۱:

تابع زیر را در نظر بگیرید

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{2n} \\ n & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0 & x > \frac{1}{2n} \end{cases}$$

نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_n(x) dx = f(0)$$

(با این فرض که $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است.)
(از کتاب روش‌های ریاضی در فیزیک- جورج آرفکن)

مسئله‌ی ۲:

هر یک از انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\text{الف) } \int_2^6 (3x^2 - 2x - 1) \delta(x - 3) dx$$

$$\text{ب) } \int_0^5 \cos x \delta(x - \pi) dx$$

$$\text{ج) } \int_0^3 x^3 \delta(x + 1) dx$$

$$\text{د) } \int_{-\infty}^{\infty} \ln(x + 3) \delta(x + 2) dx$$

$$\text{ه) } \int_{-\infty}^a \delta(x - b) dx \quad \text{و } a \text{ و } b \text{ اعداد مثبت هستند.}$$

مسئله‌ی ۳:

تابع زیر را در نظر بگیرید

$$\delta_n(x) = \frac{n}{2 \cosh^2 nx}$$

الف) نشان دهید

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = 1$$

(ب) نشان دهید

$$\int_{-\infty}^x \delta_n(x) dx = \frac{1}{2} [1 + \tanh nx] \equiv u_n(x)$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$