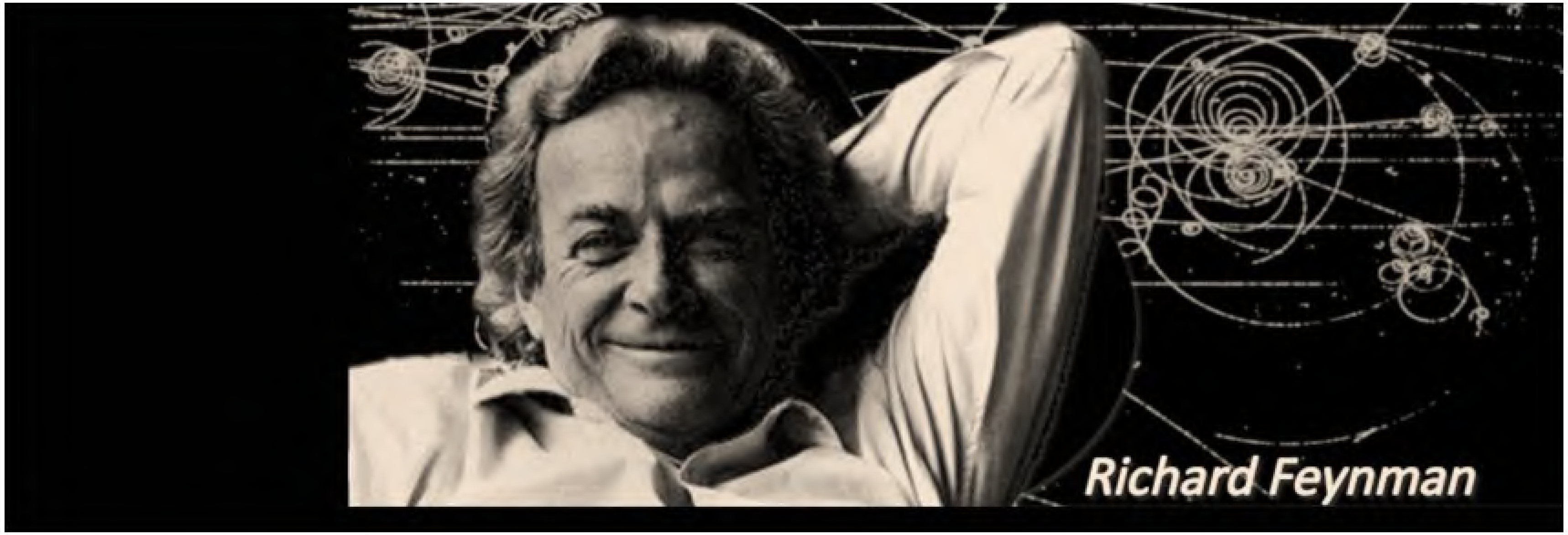
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

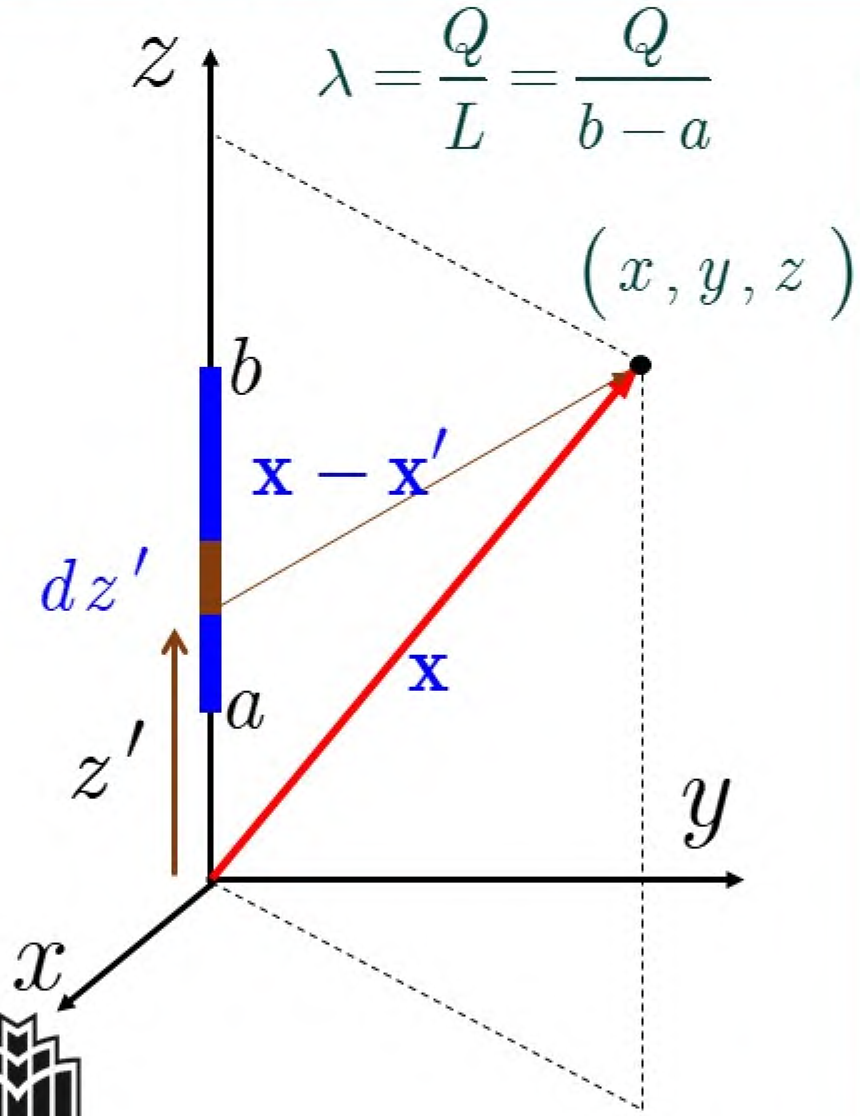
دانشگاه خوارزمی

درس دوم

قانون کولن- حل چند مسئله

Coulomb's Law-Solved Problems

دانشگاه خوارزمی



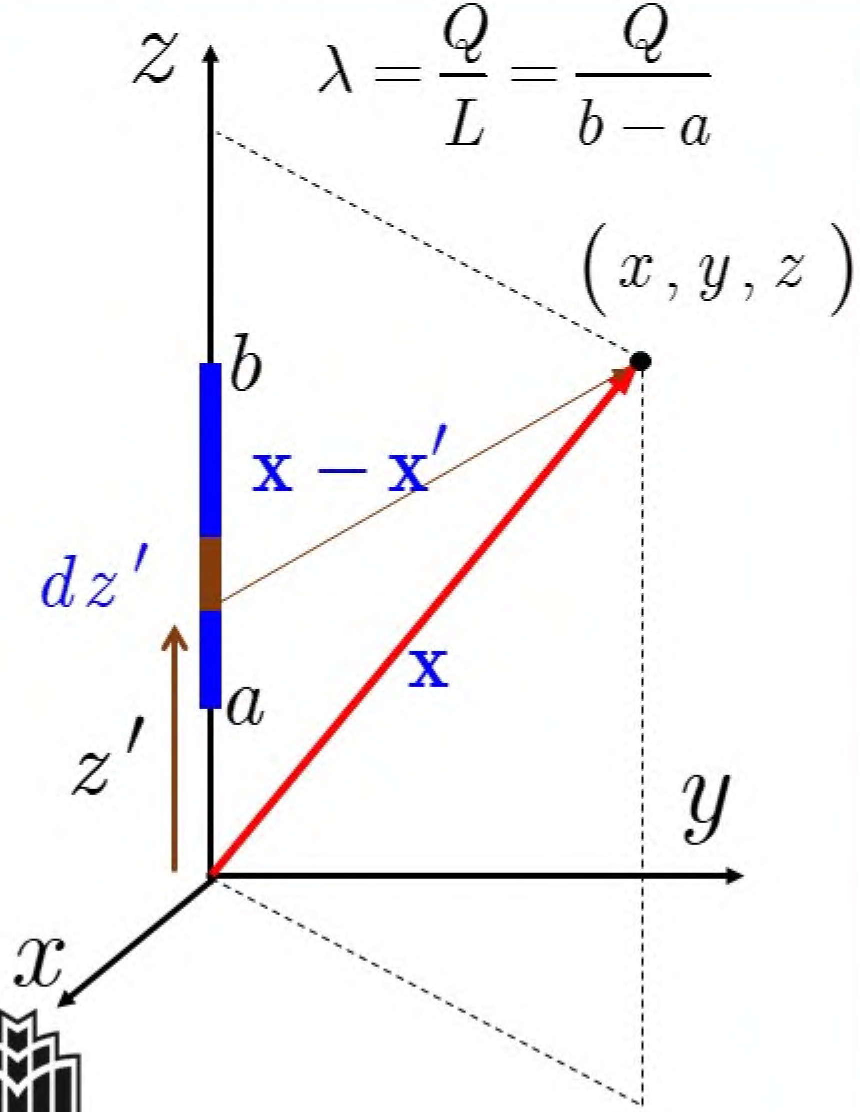
مسئله‌ی ۱: میله‌ی نازکی به طول L دارای بار الکتریکی یکنواخت Q است. این میله بر روی محور z از نقطه‌ی a تا نقطه‌ی b قرار گرفته است. میدان الکتریکی را در هر نقطه از فضا پیدا کنید.

$$\boxed{\mathbf{x} = x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y + z\hat{\mathbf{e}}_z}$$

$$\boxed{\mathbf{x}' = z'\hat{\mathbf{e}}_z}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \lambda\, dl' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right|^3}} \qquad \boxed{dl' = dz'}$$

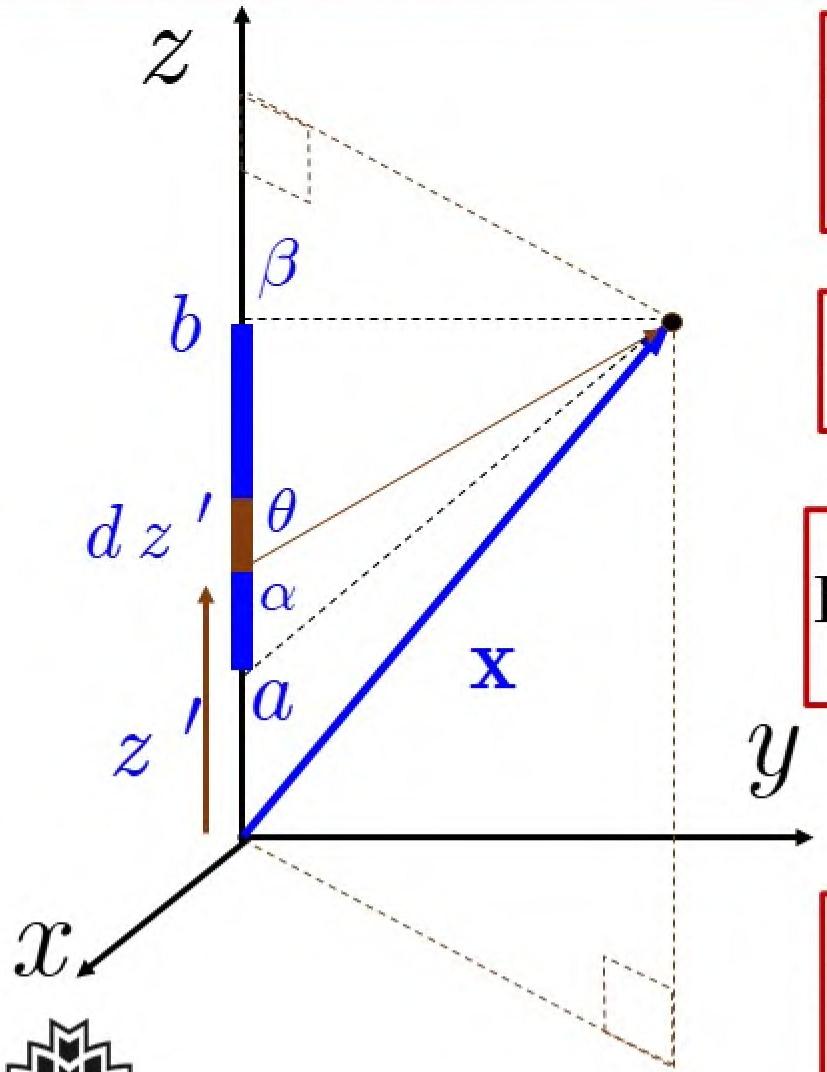
$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{b-a}$$



$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)}\int_a^b dz' \frac{x}{\left[x^2+y^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)}\int_a^b dz' \frac{y}{\left[x^2+y^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)}\int_a^b dz' \frac{z-z'}{\left[x^2+y^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{3/2}}$$



$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)}\int_a^b dz' \frac{x}{\left[x^2+y^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$z - z' = \sqrt{x^2+y^2}\cot\theta$$

$$-dz' = -\sqrt{x^2+y^2}\left(1+\cot^2\theta\right)d\theta$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)}\frac{x}{x^2+y^2}\int_\alpha^\beta d\theta \sin\theta$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)}\frac{x\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)}{x^2+y^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{z-a}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-a\right)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{z-b}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-b\right)^2}}$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)}\frac{x}{x^2+y^2}\left[\frac{z-a}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-a\right)^2}} - \frac{z-b}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-b\right)^2}}\right]$$

و به طور مشابه برای مؤلفه‌ی y به دست خواهیم آورد:

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)}\frac{y}{x^2+y^2}\left[\frac{z-a}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-a\right)^2}} - \frac{z-b}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-b\right)^2}}\right]$$

دانشگاه خوارزمی

محاسبه‌ی مؤلفه‌ی z :

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)}\int_a^b dz' \frac{z-z'}{\left[x^2+y^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$x^2+y^2+\left(z-z'\right)^2 = u^2 \ \Rightarrow -2\left(z-z'\right)dz' = 2udu$$

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-b\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-a\right)^2}}\right]$$

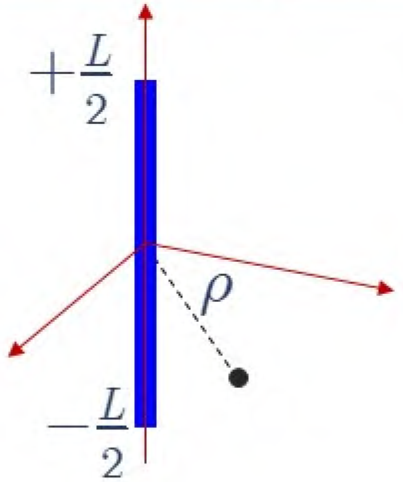
دانشگاه خوارزمی

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)}\left[\frac{\hat{\mathbf{e}}_z - \frac{z-b}{x^2+y^2}\left(x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y\right)}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-b\right)^2}} - \frac{\hat{\mathbf{e}}_z - \frac{z-a}{x^2+y^2}\left(x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y\right)}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-a\right)^2}}\right]$$

در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$x^2+y^2=\rho^2, \qquad \frac{x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \hat{\mathbf{e}}_\rho$$

$$\mathbf{E}(\rho,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(b-a)}\frac{1}{\rho}\left[\frac{\rho\hat{\mathbf{e}}_z - \left(z-b\right)\hat{\mathbf{e}}_\rho}{\sqrt{\rho^2+\left(z-b\right)^2}} - \frac{\rho\hat{\mathbf{e}}_z - \left(z-a\right)\hat{\mathbf{e}}_\rho}{\sqrt{\rho^2+\left(z-a\right)^2}}\right]$$



اگر $a=-L/2$ و $b=L/2$ و نقطه‌ی میدان روی عمود منصف میله باشد $(z=0)$ آن گاه :

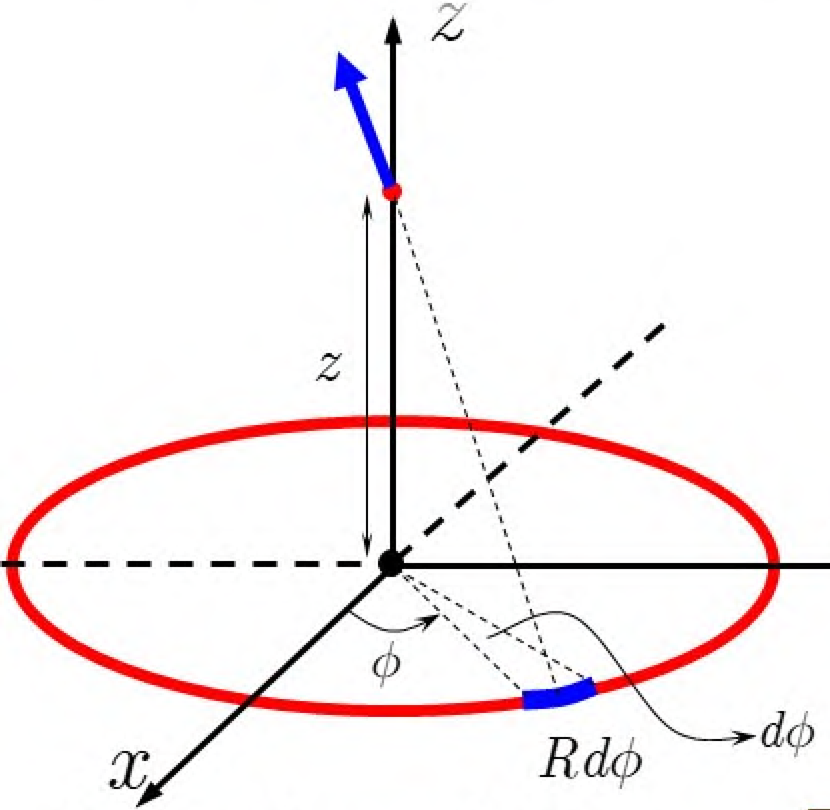
$$\mathbf{E}(\rho,z)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b-a)}\frac{1}{\rho}\left[\frac{\rho\hat{\mathbf{e}}_z-(z-b)\hat{\mathbf{e}}_\rho}{\sqrt{\rho^2+(z-b)^2}}-\frac{\rho\hat{\mathbf{e}}_z-(z-a)\hat{\mathbf{e}}_\rho}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}}\right]$$

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho}\frac{\hat{\mathbf{e}}_\rho}{\sqrt{\rho^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}}$$

$$\boxed{if\quad L\to\infty\quad\Rightarrow\quad \mathbf{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho}$$

دانشگاه خوارزمی

بار الکتریکی Q به طور یکنواخت بر حلقه ی دایره ای به شعاع R توزیع شده است. میدان الکتریکی را بر روی محور حلقه در فاصله‌ی z پیدا کنید.



$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \lambda\, dl\, \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|^3}$$

$$\boxed{\mathbf{x} = z\hat{\mathbf{e}}_z}$$

$$\boxed{\mathbf{x}' = R\hat{\mathbf{e}}_\rho = R\left(\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y\right)}$$

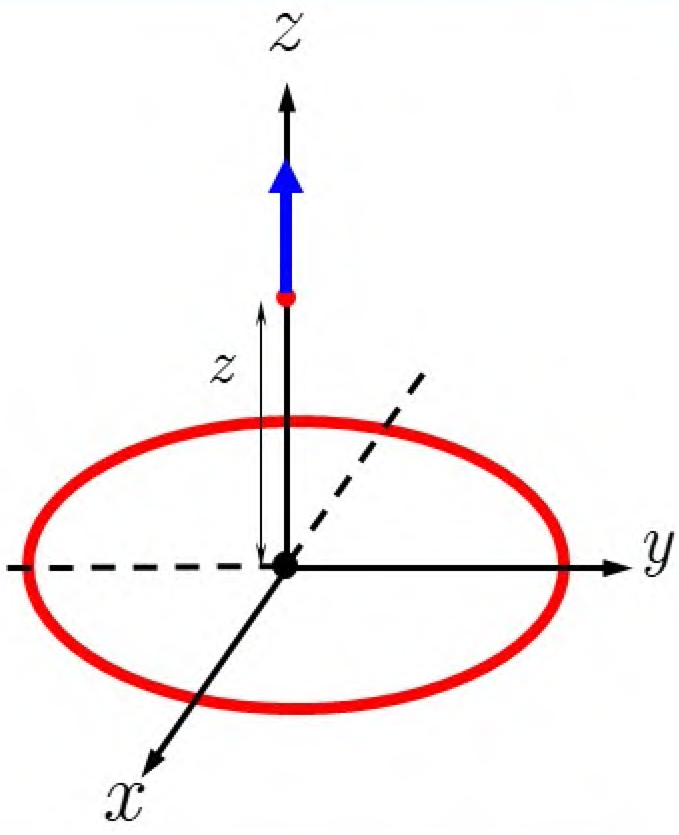
$$dq = \lambda dl$$

$$\boxed{\mathbf{x}-\mathbf{x}' = z\hat{\mathbf{e}}_z - R\hat{\mathbf{e}}_\rho = z\hat{\mathbf{e}}_z - R\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x - R\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y}$$

$$E_x = \frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = 0$$

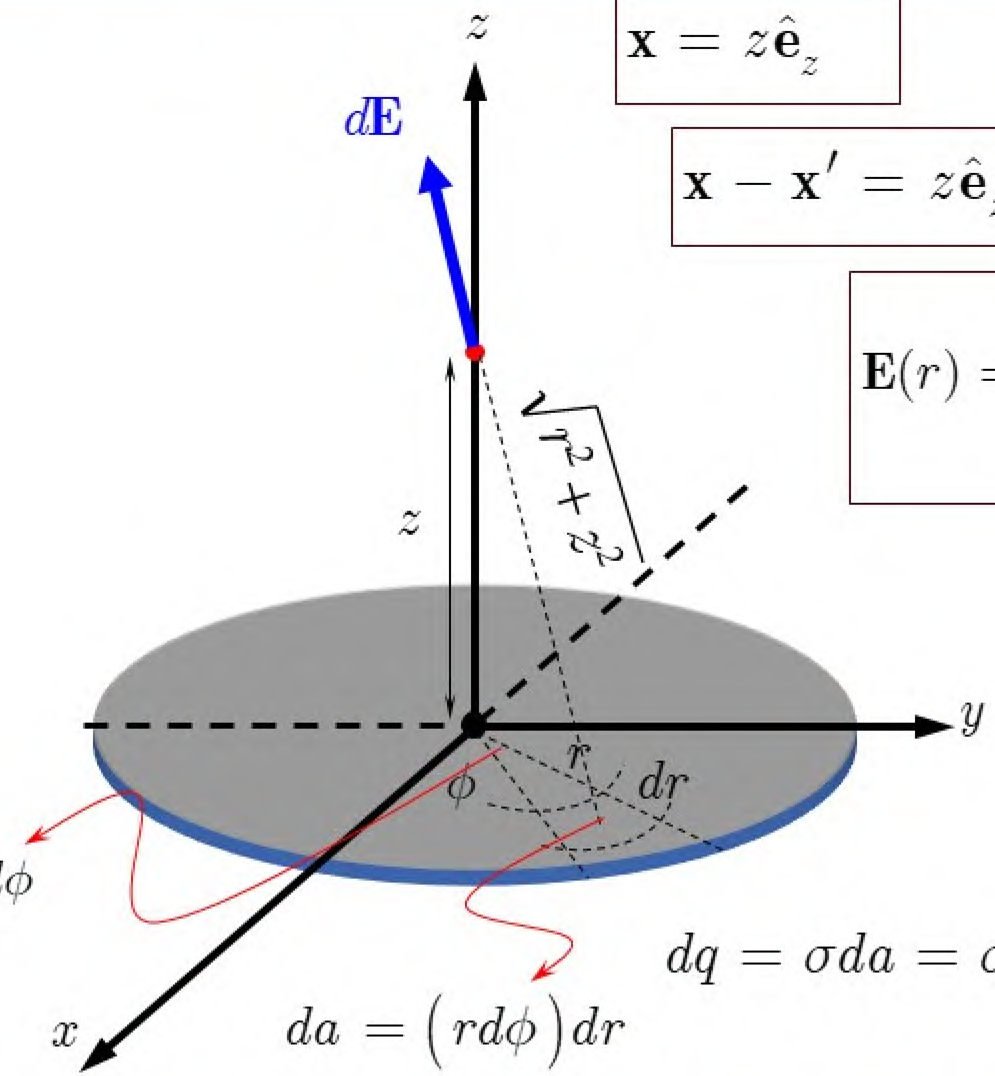
$$E_y = \frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi = 0$$

$$E_z = \frac{\lambda R z}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\lambda 2\pi R z}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$



$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{e}}_z}$$

بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی σ بر روی قرص دایره ای به شعاع R توزیع شده است. میدان الکتریکی را با توجه به شکل زیر در نقطه‌ی $(0,z)$ پیدا کنید.



$$\mathbf{x} = z\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\mathbf{x}' = r\hat{\mathbf{e}}_r = r\left(\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y\right)$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}' = z\hat{\mathbf{e}}_z - r\hat{\mathbf{e}}_r = z\hat{\mathbf{e}}_z - r\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x - r\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \sigma\, rdrd\phi\, \frac{z\hat{\mathbf{e}}_z - r\cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_x - r\sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_y}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

$$da = \left(rd\phi\right)dr$$

$$dq = \sigma da = \sigma rdrd\phi$$

$$E_z = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\sigma rdrd\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$E_x = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\sigma rdrd\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\cos\phi}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = 0$$

$$E_y = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\sigma rdrd\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\sin\phi}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = 0$$

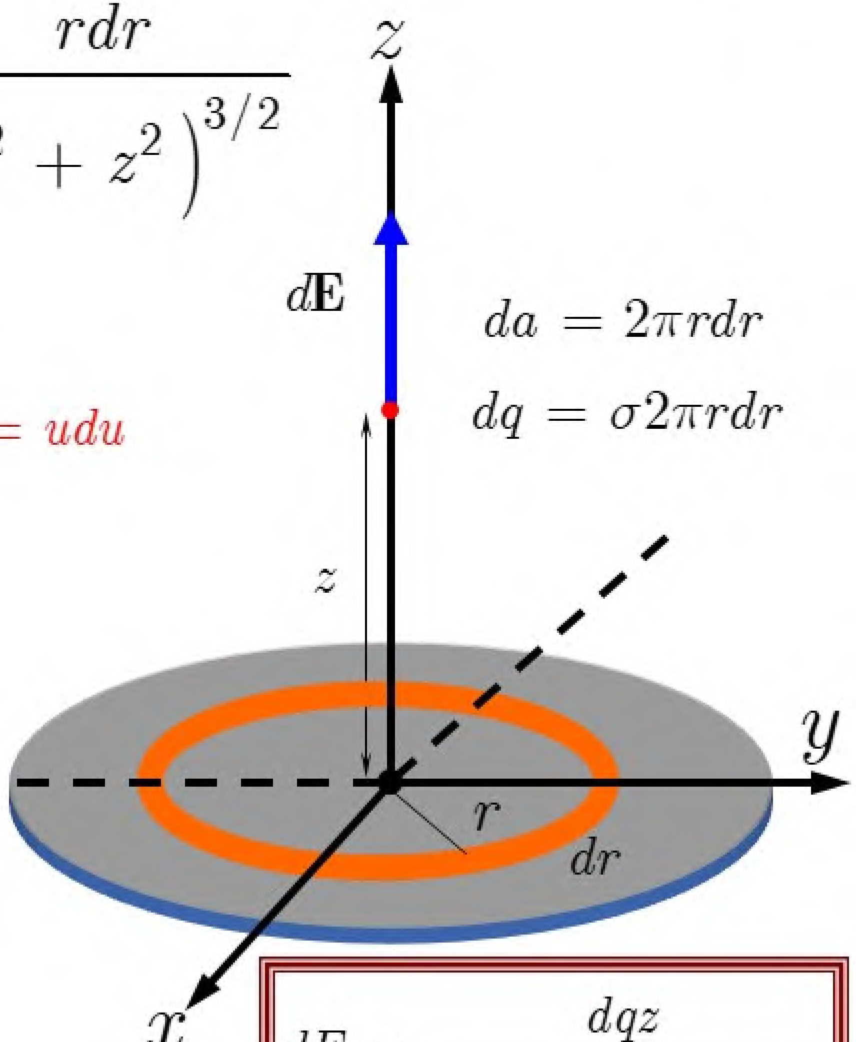
$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_{r=0}^{r=R}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{rdrd\phi}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma z 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\int_{r=0}^{r=R}\frac{rdr}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\mathbf{E} = E_z\hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_z\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_{r=0}^{r=R}\frac{rdr}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$r^2+z^2 = u^2 \Rightarrow rdr = udu$$

$$\left|\mathbf{E}\right| = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{\left|z\right|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_z\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1-\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] & z>0 \\ -\hat{\mathbf{e}}_z\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1+\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] & z<0 \end{cases}$$



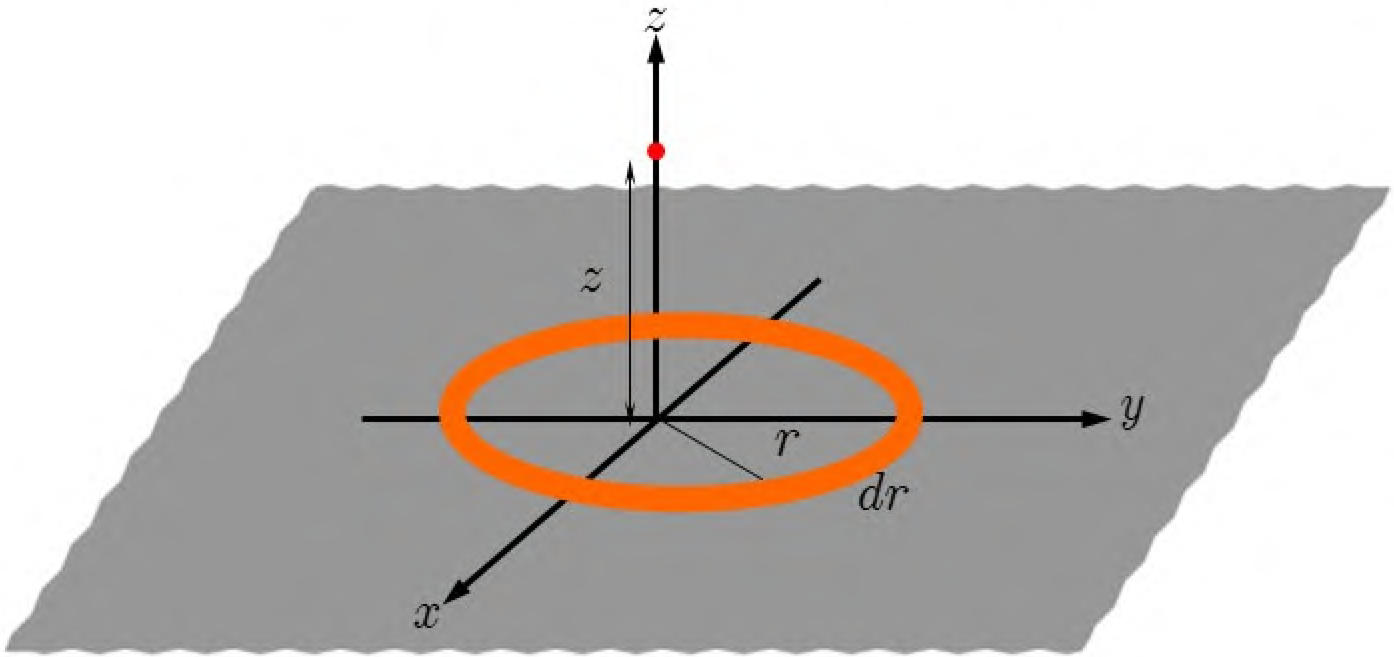
$$da = 2\pi rdr$$

$$dq = \sigma 2\pi rdr$$

$$dE = \frac{dqz}{4\pi\epsilon_0\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

دانشگاه خوارزمی

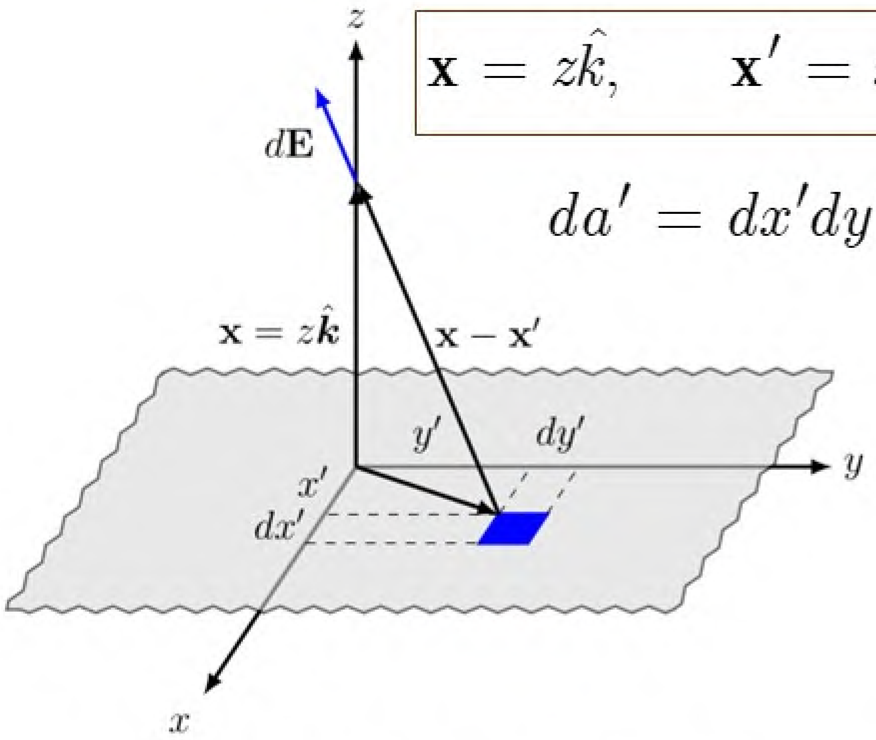
میدان الکتریکی ناشی از یک ورقه‌ی نارسانای نازک با ابعاد بی نهایت و چگالی سطحی بار یکنواخت



$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{e}_z \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & z > 0 \\ -\mathbf{e}_z \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & z < 0 \end{cases}$$

$$E = \frac{z\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\int_{r=0}^{r=\infty} \frac{rdr}{\left(r^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

میدان الکتریکی ناشی از یک ورقه‌ی نارسانای نازک با ابعاد بی نهایت و چگالی سطحی بار یکنواخت (روش دوم)



$$\mathbf{x} = z\hat{k}, \qquad \mathbf{x}' = x'\hat{i} + y'\hat{j}$$

$$da' = dx'dy'$$

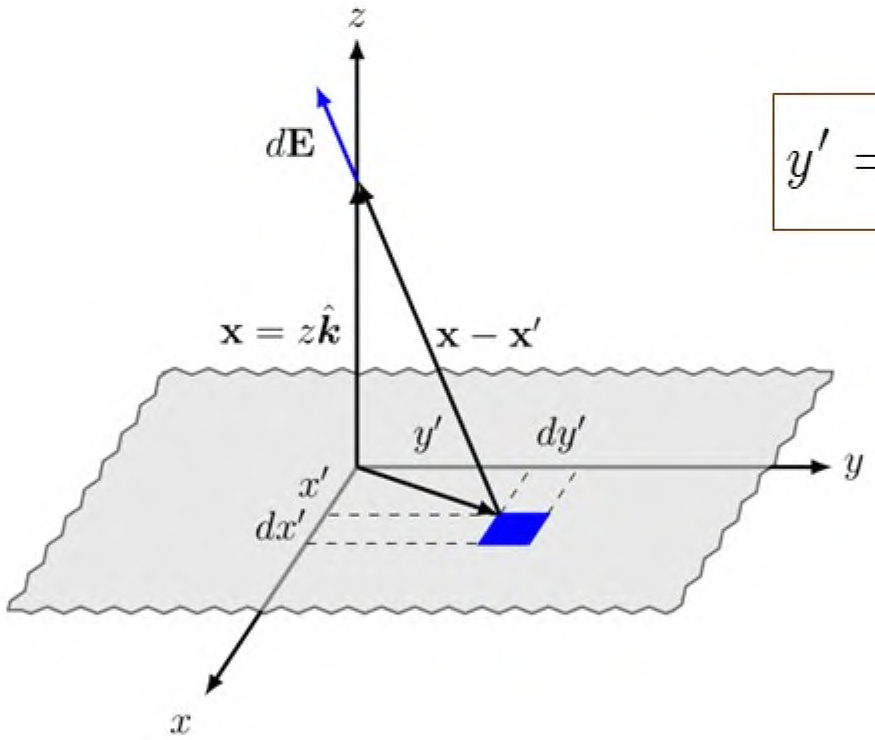
$$\mathbf{x} - \mathbf{x}' = z\hat{k} - x'\hat{i} - y'\hat{j}$$
$$|\ \mathbf{x} - \mathbf{x}'\ | = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int da'\sigma\,\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\ \mathbf{x}-\mathbf{x}'\ |^3}$$
$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx'dy'\,\frac{z\hat{k} - x'\hat{i} - y'\hat{j}}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

مؤلفه‌های x و y صفر می‌شود زیرا انتگرال‌ده‌ی آن‌ها توابعی فرد هستند و انتگرال بر رویِ بازه‌ی متقارن گرفته می‌شود

$$E_x = E_y = 0$$

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx'dy'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{3/2}}$$

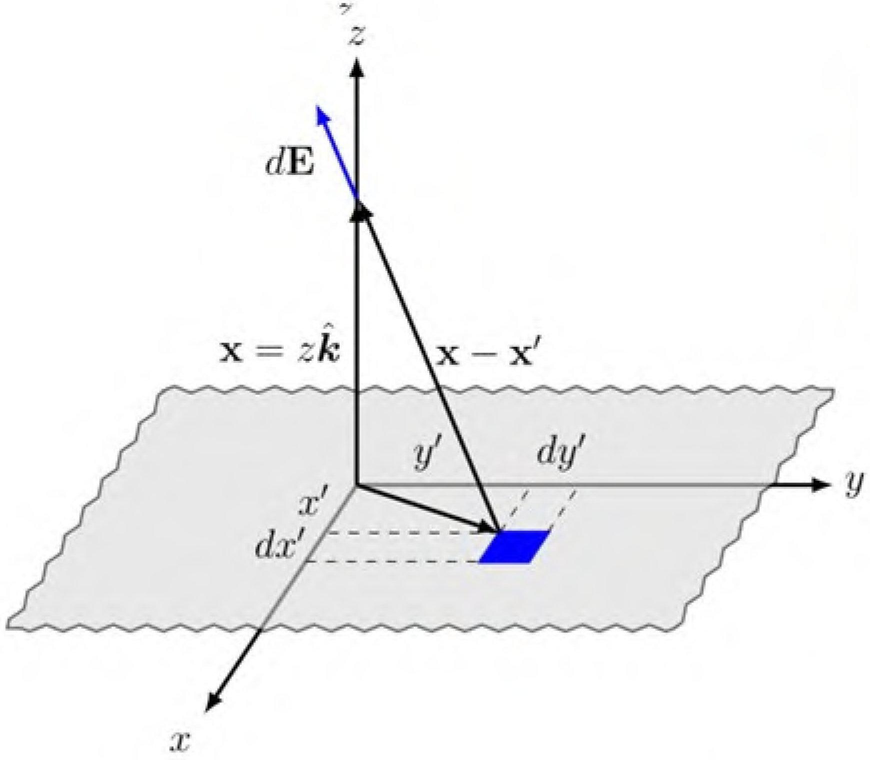


$$y' = \left(\sqrt{x'^2+z^2}\right)\tan\theta \qquad dy' = \left(\sqrt{x'^2+z^2}\right)\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta$$

$$\begin{aligned}E_z &= \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}dx'\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{x'^2+z^2}}{(x'^2+z^2)^{3/2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\\ &= \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx'}{x'^2+z^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}d\theta\cos\theta\\ &= \frac{2\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx'}{x'^2+z^2}\end{aligned}$$

برای محاسبه‌ی انتگرالِ اخیر نیز تغییرِ متغیرِ $x' = z\tan\alpha$ را به کار می‌بریم

دانشگاه خوارزمی



$$\boxed{E_z = \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{z(1+\tan^2\alpha)}{z^2(1+\tan^2\alpha)}d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \hat{k}\,\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & z > 0 \\ -\hat{k}\,\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & z < 0 \end{cases}$$

شاد و مهربان باشید