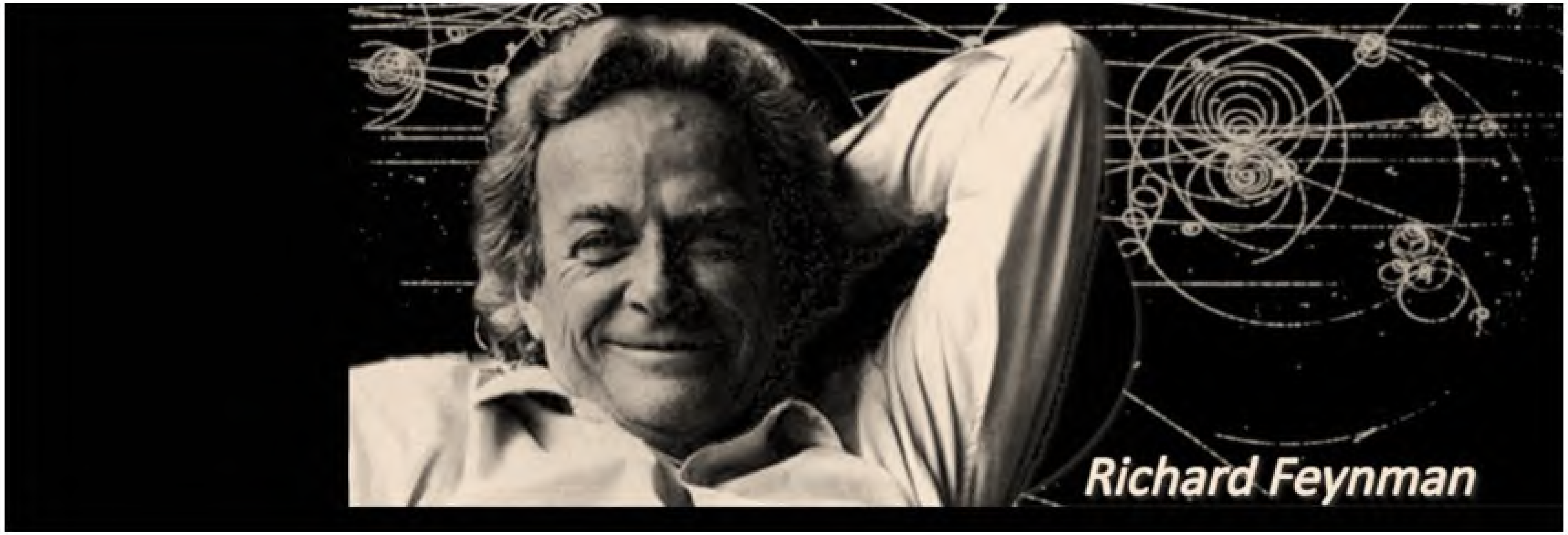
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس سوم

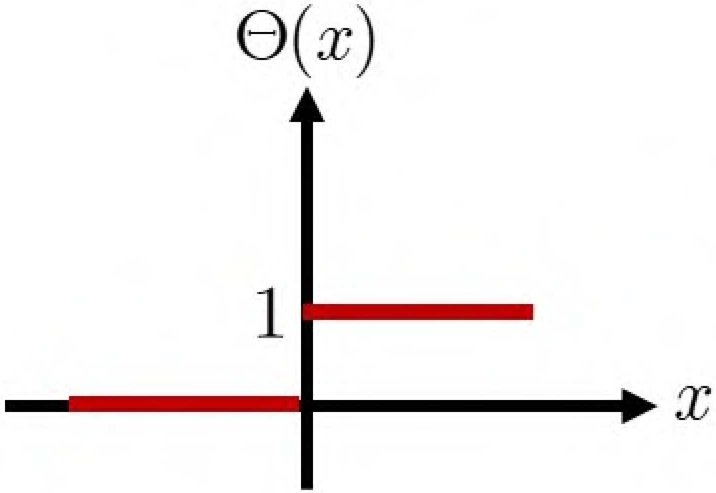
تابع دلتای دیراک- بخش۱

Dirac Delta Function-Part1

دانشگاه خوارزمی

تابع هوی‌ساید (Heaviside) یا تابع پله‌ای، به شکل زیر تعریف می‌شود

Oliver Heaviside
(1850 -1925)



$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

این تابع با نماد $H(x)$ نیز نمایش داده می‌شود

$$\boxed{\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ & \\ 1 & x > 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{\delta(x) = \frac{d\Theta(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ & \\ \infty & x = 0 \end{cases}}$$

ویژگی مهم این تابع این است که انتگرال آن (روی بازه‌ای که شامل 0 باشد)، برابر با 1 می‌شود

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} d\Theta(x) = 1}$$

در واقع می‌توان گفت که تابع $\delta(x)$ حولِ نقطه‌ی $x=0$ قله‌ای است و سطحِ زیر منحنی آن برابر با **1** است.

واضح است که تابع $\delta(x\text{-}a)$ حولِ نقطه‌ی $x=a$ قله‌ای است.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ \\ \infty & x = a \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)dx = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(x-a)dx = 1$$

دیمانسیونِ تابع دلتا وارونِ طول است: $\frac{۱}{\text{طول}}$ $(L^{-۱})$

فرض کنید تابع $f(x)$ تابعی پیوسته باشد که مقدارِ آن در بی‌نهایت صفر است

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = ?$$

$$f(x) = u \quad \rightarrow \quad du = f'(x)dx$$

$$\delta(x)dx = dv \quad \rightarrow \quad v = \Theta(x)$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx &= \Big[f(x)\Theta(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\Theta(x)dx \\
&= 0 - \int_{0}^{+\infty} f'(x)dx \\
&= 0 - \Big[f(x)\Big]_{0}^{+\infty} \\
&= 0 - [f(\infty) - f(0)] \\
&= f(0)
\end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

در این‌جا فرض کردیم که تابع $f(x)$ در بی‌نهایت صفر باشد تا بتوانیم از روش جزء به جزء استفاده کنیم. اما از آن‌جا که $\delta(x)$ همه جا غیر از $x = 0$ برابر با صفر است، بنابر این انتگرال فوق فقط در $x = 0$ مخالف صفر است. پس رفتار $f(x)$ در بی‌نهایت نباید نقشی در مقدار انتگرال داشته باشد. بنابر این برای هر تابع پیوسته‌ای می‌توان نوشت:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(x)\delta(x)dx = f(0)}$$

همچنین واضح است که:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\Theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x')dx'}$$

$$\boxed{\operatorname{sgn}(x) = \frac{d|x|}{dx} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}}$$

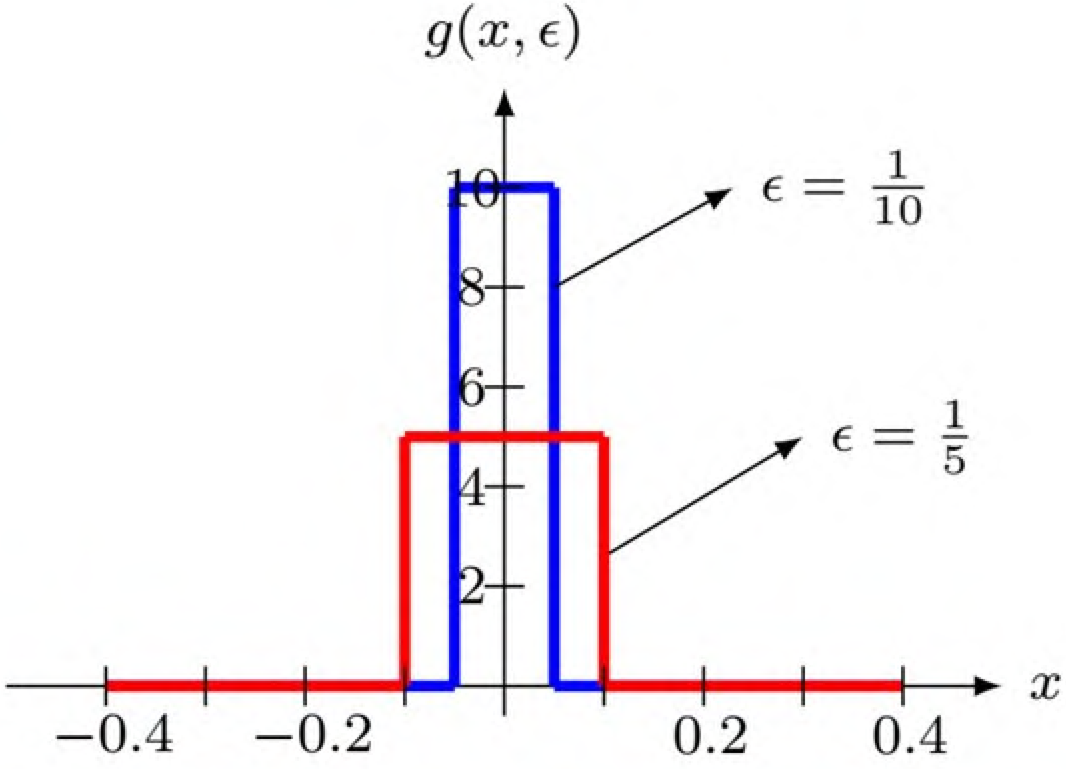
$$\boxed{\operatorname{sgn}(x) = -1 + 2\int_{-\infty}^{x} \delta(x')dx'}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{sgn}(x) = 2\delta(x)}$$

$$g(x,\epsilon) = \begin{cases} 0 & |x| > \epsilon/2 \\ 1/\epsilon & |x| < \epsilon/2 \end{cases} = \frac{1}{\epsilon}\Theta\left(\frac{\epsilon}{2} - |x|\right)$$

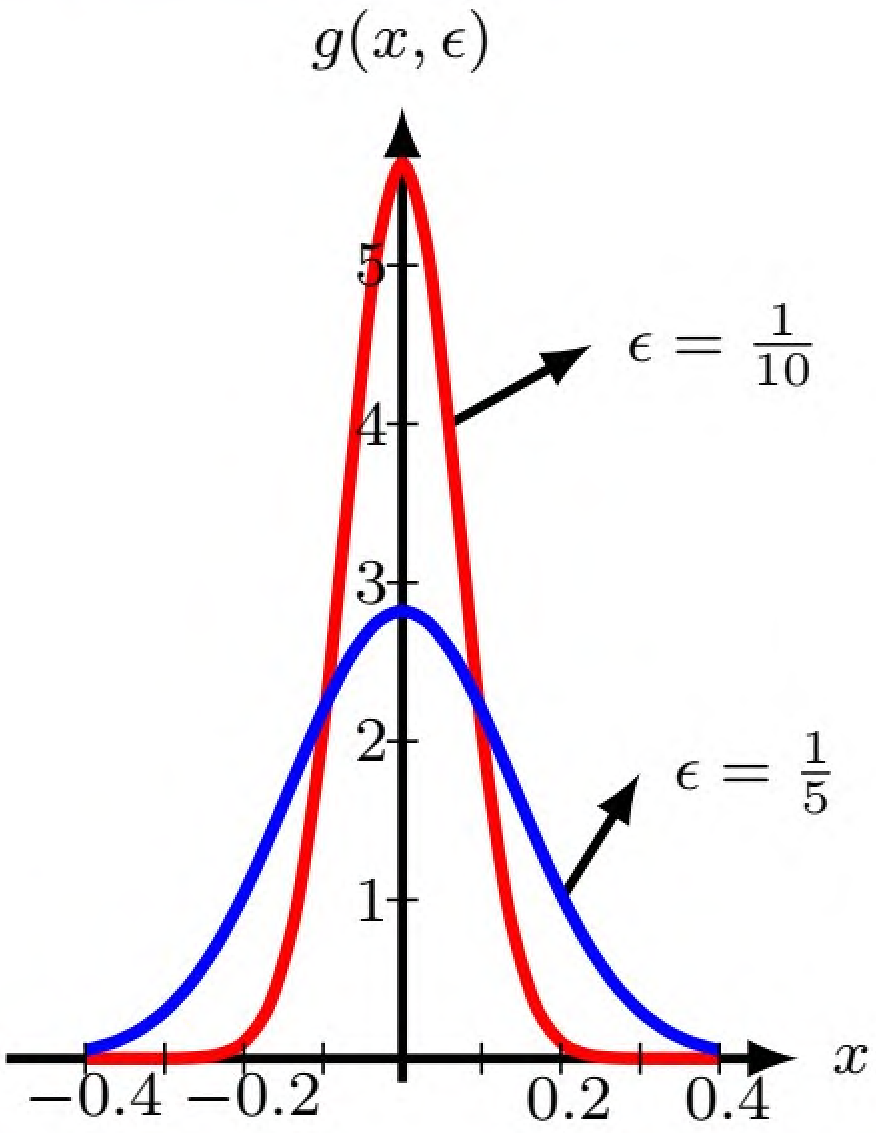
$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} g(x,\epsilon) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,\epsilon)dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon/2}^{+\epsilon/2} \frac{1}{\epsilon}dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$



اگر تابعی مانند $f(x)$ داشته باشیم که پیوسته باشد و $F'(x) = f(x)$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x,\epsilon)dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{-\epsilon/2}^{+\epsilon/2} f(x)dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left[F(\epsilon/2) - F(-\epsilon/2)\right] \\
&= F'(0)
\end{aligned}$$



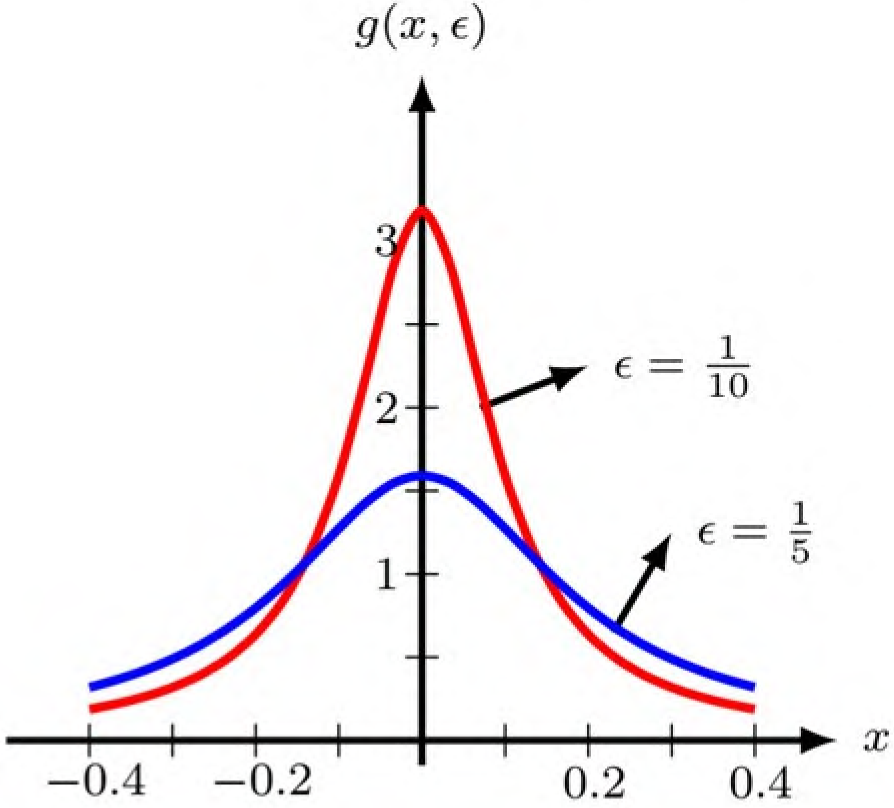
Gaussian نمایشِ گوسی

$$g(x, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon^2}}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} g(x, \epsilon) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

Lorentzian نمایشِ لورنتسی

$$g(x,\epsilon) = \frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2}$$



$$\lim_{\epsilon\to 0} g(x,\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2} = \begin{cases} 0 & x\neq 0 \\ \infty & x=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,\epsilon)dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2}dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y^2+1}dy \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\tan^{-1}(y)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}(\pi) \\ &= 1\end{aligned}$$

$(y = x/\epsilon)$

همچنین تابع دلتا را با حدهای زیر نیز می‌توان نشان داد

$$
\begin{aligned}
\delta(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2}\epsilon|x|^{\epsilon-1} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\mathrm{Ai}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\mathrm{J}_{1/\epsilon}\left(\frac{x+1}{\epsilon}\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\mathrm{L}_{n}\left(\frac{2x}{\epsilon}\right)
\end{aligned}
$$

Ai تابع آیری، J_n تابع بسل نوع اول، و L_n چند جمله‌ای لاگر است.

نمایش فوریه‌ی تابع دلتای دیراک به شکل زیر است

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

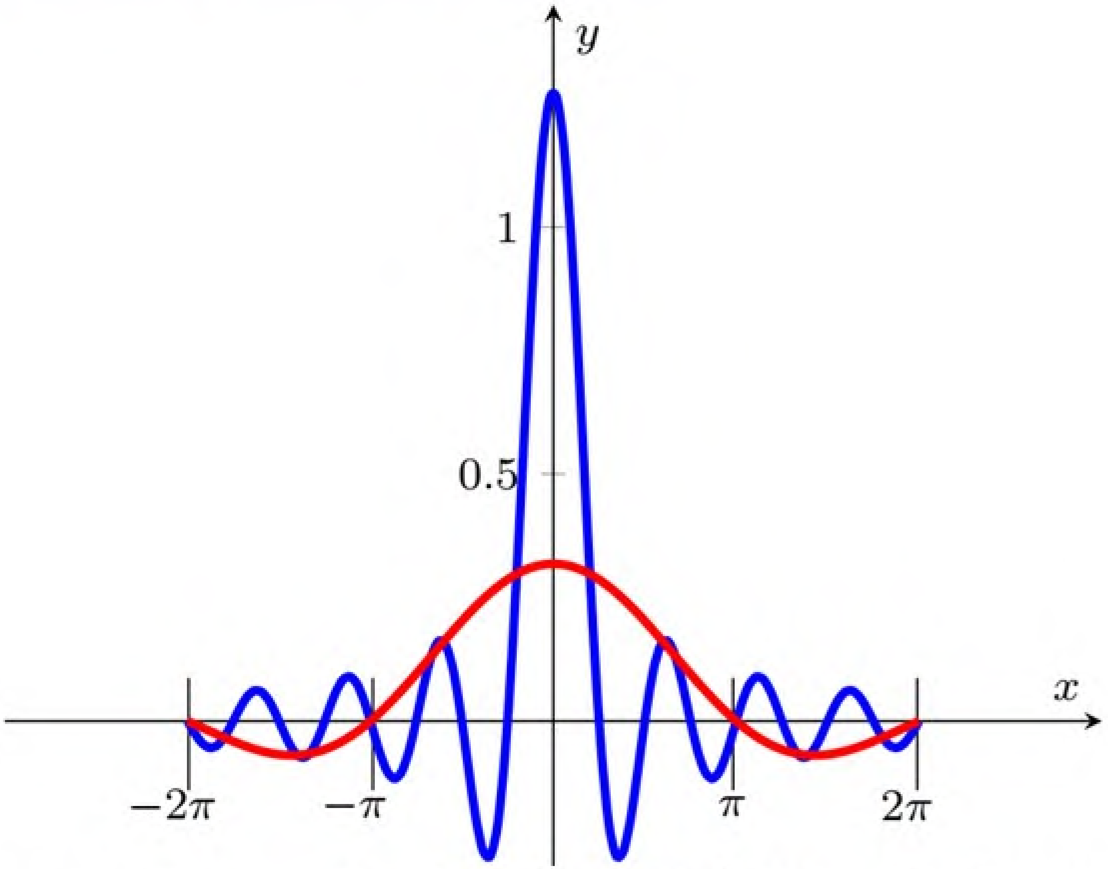
برای بررسی آن تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x,u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-u}^{u} e^{ikx} dk$$

دانشگاه خوارزمی

نمایش فوریه‌ی تابع دلتای دیراک به شکل زیر است

$$
\begin{aligned}
f(x,u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-u}^{u} e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{ix}e^{ikx}\right]_{k=-u}^{k=+u} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{iux}-e^{-iux}}{ix} \\
&= \frac{1}{\pi x}\frac{e^{iux}-e^{-iux}}{2i} \\
&= \frac{1}{\pi x}\sin ux \\
&= \frac{u}{\pi}\frac{\sin ux}{ux}
\end{aligned}
$$

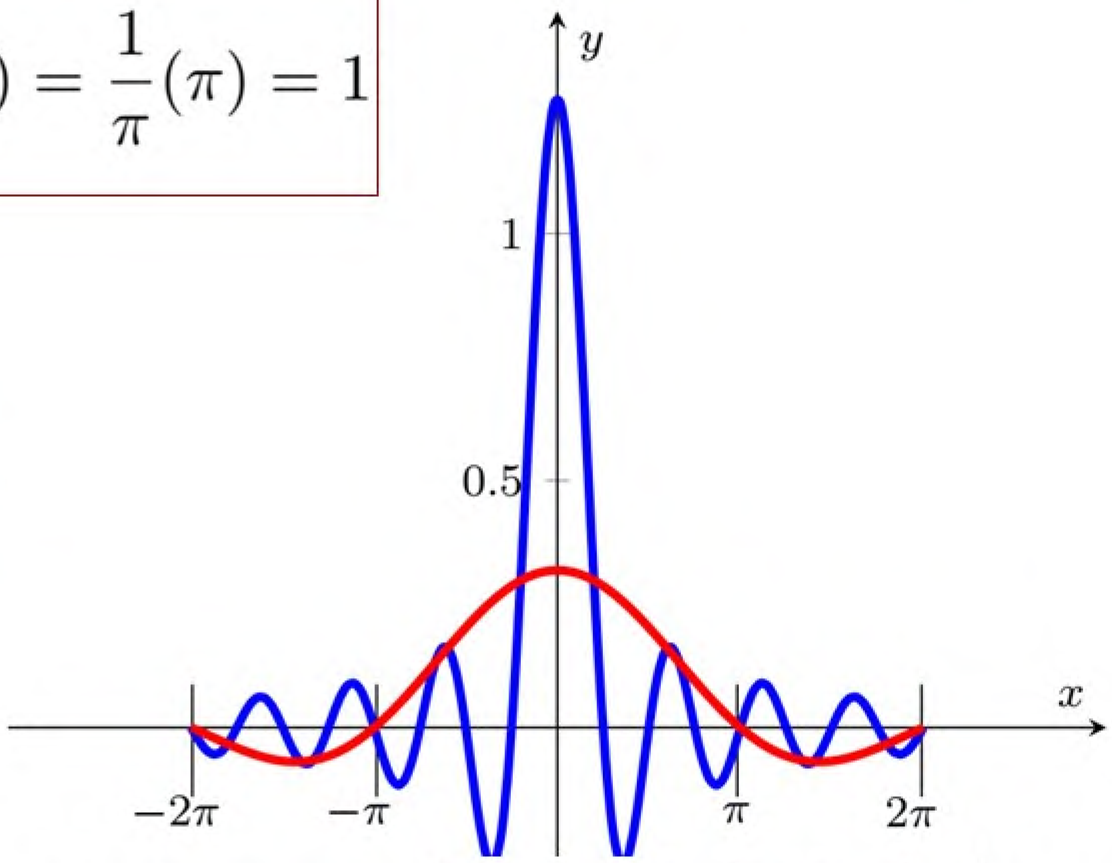


نمودار تابع $y = \frac{u}{\pi}\frac{\sin ux}{ux}$ به ازای $u = 1$ و $u = 4$

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x,u)dx = \frac{1}{\pi}\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\sin(ux)}{ux} d(ux) = \frac{1}{\pi}(\pi) = 1$$

$$\delta(x) = \lim_{u\to\infty} f(x,u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

$$\delta(x-a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-a)} dk$$



نمودار تابع $y = \frac{u}{\pi}\frac{\sin ux}{ux}$ به ازای $u = 1$ و $u = 4$

روش دوم: برای به دست آوردن نمایش فوریه‌ی تابع دلتا، انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-a)}dk &= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_0^{\infty} e^{ik(x-a+i\epsilon)}dk + \int_{-\infty}^{0} e^{ik(x-a-i\epsilon)}dk\right\} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{i}{(x-a)+i\epsilon} - \frac{i}{(x-a)-i\epsilon}\right\} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{2\epsilon}{(x-a)^2-\epsilon^2}\right\} \\
&= 2\pi \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{\epsilon/\pi}{(x-a)^2-\epsilon^2}\right\} \\
&= 2\pi\delta(x-a)
\end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید