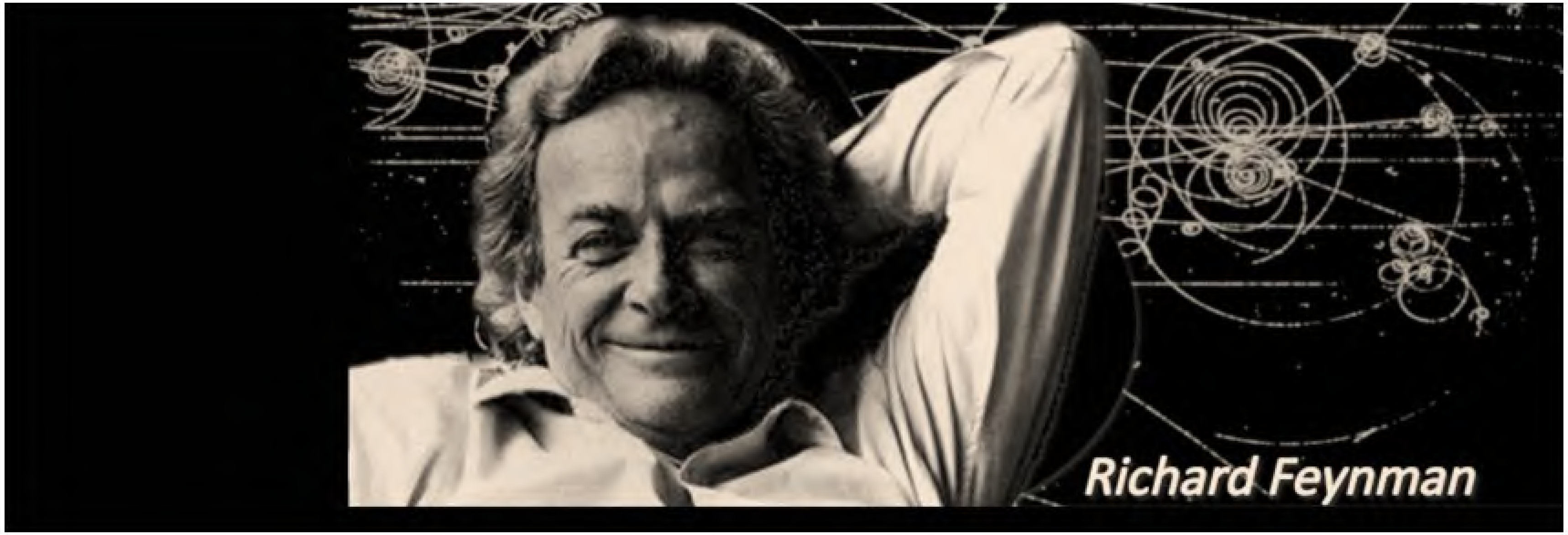
# Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی




اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را
به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

دانشگاه خوارزمی

# درس چهارم
# تابع دلتای دیراک- بخش۲

# Dirac Delta Function-Part2

دانشگاه خوارزمی

تابع دلتا تابعی زوج است: $\boxed{\delta(x-a) = \delta(a-x)}$ $\boxed{\delta(x) = \delta(-x)}$

قبلاً دیدیم: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)}$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx &= \lim_{\epsilon\to\circ}\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta(x-a)dx \\
&= \lim_{\epsilon\to\circ} f(a)\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon}\delta(x-a)dx \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)} \qquad \boxed{x\delta(x) = 0}$$

دانشگاه خوارزمی

اگر $\delta'(x)$ مشتقِ تابعِ دلتا باشد، آن‌گاه
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-a)dx = -f'(a)$$

اثبات:

انتگرال را با استفاده از روش جزء به جزء حل می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-a)dx = f(x)\delta(x-a)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x-a)dx$$
$$= 0 - f'(a)$$
$$= -f'(a)$$

به همین ترتیب برای مشتقاتِ مرتبه‌ی بالاتر تابع دلتا $\delta^{(n)}(x)$ می‌توان نوشت:
$$\int f(x)\delta^{(n)}(x-a)dx = (-1)^n f^{(n)}(a)$$

**نشان دهید** $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

**حل:** دو حالت $a<0$ و $a<0$ را به طور مجزا بررسی می‌کنیم

❑ **حالت (الف) $a>0$**

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x); \qquad a > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax) f(x) dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) f(y/a) dy = \frac{1}{a} f(0)$$

❑ **حالت (ب) $a<0$**

$$\delta(ax) = -\frac{1}{a}\delta(x); \qquad a < 0$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax) f(x) dx &= \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(y) f(y/a) dy \\ &= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) f(y/a) dy \\ &= -\frac{1}{a} f(0)\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)}$$

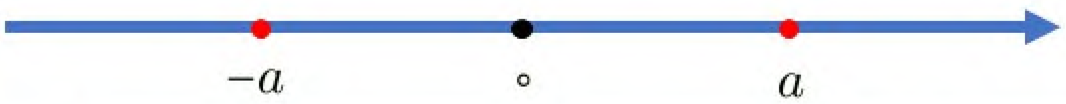
دانشگاه خوارزمی

**نشان دهید**

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{|2a|}\left[\delta(x+a) + \delta(x-a)\right]$$

**حل:** عبارتِ $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ دارای دو ریشه‌ی $x = +a$ و $x = -a$ است.

$\delta(x^2 - a^2)$ همه جا صفر است مگر در نقاطِ $x = \pm a$




$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x^2 - a^2)dx = \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} f(x)\delta(x^2 - a^2)dx + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta(x^2 - a^2)dx$$

انتگرالِ اول حولِ $x = -a$ مخالفِ صفر است. بنابر این در انتگرالِ اول می‌توان نوشت:

$$\delta(x^2 - a^2) = \delta[(x-a)(x+a)] = \delta[(-2a)(x+a)]$$

انتگرالِ دوم حولِ $x = +a$ مخالفِ صفر است. بنابر این در انتگرالِ دوم می‌توان نوشت:

$$\delta(x^2 - a^2) = \delta[(x-a)(x+a)] = \delta[(x-a)(2a)]$$


$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x^2-a^2)dx &= \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} f(x)\delta(x^2-a^2)dx \\
&\qquad + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta(x^2-a^2)dx \\
&= \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} f(x)\delta[-2a(x+a)]dx \\
&\qquad + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta[+2a(x-a)]dx \\
&= \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} f(x)\frac{1}{|2a|}\delta[(x+a)]dx \\
&\qquad + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\frac{1}{|2a|}\delta[(x-a)]dx
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{|2a|}\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]}$$

دانشگاه خوارزمی

اگر $\lim_{\epsilon\to 0} g(x,\epsilon)$ نمایشی برای تابعِ دلتا باشد، آن‌گاه $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\partial g(x,\epsilon)}{\partial x}$ نمایشی برای مشتق تابع دلتاست.

اما برای درک بهتر می‌توانیم مشتق تابع دلتا را به شکل زیر بنویسیم:

$$\frac{d\delta(x)}{dx} = \delta'(x) = \lim_{a\to 0}\frac{\delta(x+a/2)-\delta(x-a/2)}{a}$$

در مباحث بعدی از این نمایش برای مشتق تابع دلتا استفاده خواهیم کرد.

در حالت سه بُعدی، تابع دلتای دیراک به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=\begin{cases}0 & \mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0\\ \infty & \mathbf{x}=\mathbf{x}_0\end{cases}\qquad \int_V \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)dv=1,\qquad (\mathbf{x}_0\in V)$$

در حالت سه بُعدی دیمانسیونِ تابع دلتا وارونِ حجم است: $\frac{1}{\text{حجم}}$، $(L^{-3})$

در حالت دو بُعدی، تابع دلتای دیراک به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\int_A \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)da=1,\qquad (\mathbf{x}_0\in A)$$

نمایش فوریه‌ی تابع دلتا در حالت سه بُعدی به شکلِ زیر است:

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}$$

عنصر حجم در دستگاه مختصاتِ کارتزین به شکلِ $dv = dxdydz$ است. بنابر این

$$\int f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)dv = \int dx \int dy \int dz\ f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)$$

این رابطه نشان می‌دهد که برای نوشتنِ تابع دلتا در مختصات کارتزین کافی‌است آن را به صورتِ حاصلِ ضرب سه تابع دلتای یک بُعدی بنویسیم:

$$\boxed{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)}$$

به طور کاملاً مشابه می‌توان دید که در حالت دو بُعدی تابع دلتا در مختصات کارتزین به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0), \qquad (\mathbf{x}=(x,y))}$$

دانشگاه خوارزمی

در مختصات قطبی عنصر سطح به شکلِ $da = \rho d\rho d\phi$ است.

بنابر این با توجه به رابطه‌ی زیر

$$\int_A \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) da = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rho d\rho d\phi = 1$$

کافی است که تابع دلتا را به شکلِ زیر بنویسیم:

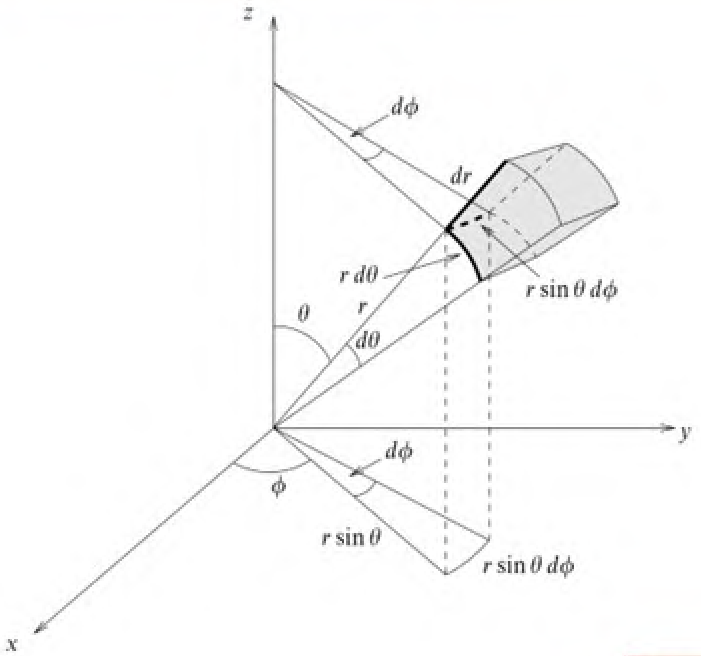
$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) = \frac{\delta(\rho - \rho_0)\delta(\phi - \phi_0)}{\rho} = \frac{\delta(\rho - \rho_0)\delta(\phi - \phi_0)}{\rho_0}$$

این در صورتی است که $\mathbf{x}_0 \neq 0$ باشد.

اگر $\mathbf{x}_0 = 0$، در این صورت $\phi_0$ تعریف نشده است و $\delta(\phi - \phi_0)$ بی معنی خواهد بود.

در این حالت تابع دلتا را می‌توان به شکلِ زیر نوشت:

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y) = \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}$$




عنصرِ حجم در دستگاه مختصات کروی به شکلِ زیر است:

$$dv = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= r^2 dr d(\cos\theta) d\phi \qquad \text{(و یا)}$$

$$= r^2 dr d\Omega \qquad \text{(و یا)}$$

$d\Omega$ زاویه‌ی فضایی است: $\Omega \equiv (\theta, \phi)$

$$\begin{aligned}
\int \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) dv &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{\infty} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) r^2 dr d(\cos\theta) d\phi \\
&= \int_0^{\infty} r^2 dr \int d\Omega \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

بنابر این در مختصات کروی تابع دلتا را می‌توان به هر یک از شکل‌های زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) &= \frac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r^2\sin\theta}\\ &= \frac{\delta(r-r_0)\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r^2}\\ &= \frac{\delta(r-r_0)\delta(\Omega-\Omega_0)}{r^2}\end{aligned}$$

واضح است که در روابطِ فوق به جای $r^2$ می‌توان $r_0^2$ و یا $rr_0$ قرار داد

این در صورتی است که $\mathbf{x}_0 \neq 0$ باشد

دانشگاه خوارزمی

در صورتی که $\mathbf{x}_0 = 0$ باشد، آن‌گاه $\Omega_0$ تعریف نشده است و عبارتِ $\delta(\Omega - \Omega_0)$ بی‌معنی خواهد بود. در این حالت کافی است تابع دلتا را به شکلِ زیر بنویسیم:

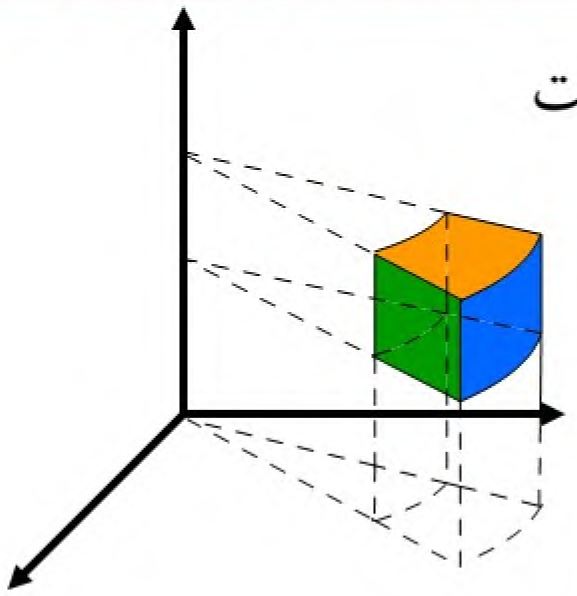
$$\boxed{\delta(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}}$$

یک حالتِ خاصِ دیگر این است که نقطه‌ی $\mathbf{x}_0$ بر روی محور $z$ باشد؛ یعنی $\mathbf{x}_0 = z_0\hat{\boldsymbol{k}}$ در این صورت به سادگی دیده می‌شود که تابع دلتا را می‌توان به شکلِ زیر نوشت:

$$\boxed{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0) = \frac{\delta(r - r_0)\delta(\theta)}{2\pi r^2 \sin\theta}}$$

دانشگاه خوارزمی

عنصرِ حجم در دستگاه مختصات استوانه‌ای به شکلِ $dv = \rho d\rho d\phi dz$ است



$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) = \frac{\delta(\rho-\rho_0)\delta(\phi-\phi_0)\delta(z-z_0)}{\rho}$$
$$= \frac{\delta(\rho-\rho_0)\delta(\phi-\phi_0)\delta(z-z_0)}{\rho_0}$$

در صورتی که $\mathbf{x}_0 = 0$ باشد، آن‌گاه

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi\rho}$$

عملگرِ $\boldsymbol{\nabla}$ در دستگاه مختصات کارتزین به شکلِ $\boldsymbol{\nabla} = \hat{\boldsymbol{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial z}$ است.

برای آن که معلوم باشد که نسبت به $\mathbf{x}$ یا $\mathbf{x}_0$ مشتق می‌گیریم، آن را به شکلِ $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}$ یا $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}_0}$ می‌نویسیم. به راحتی دیده می‌شود که:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}_0}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}_0}\delta(\mathbf{x}_0-\mathbf{x})}$$

$$\begin{aligned}\int f(\mathbf{x})\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)dv &= \int f(\mathbf{x})[-\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}_0}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)]dv \\ &= -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}_0}\int f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)dv \\ &= -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}_0)\end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

# شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی