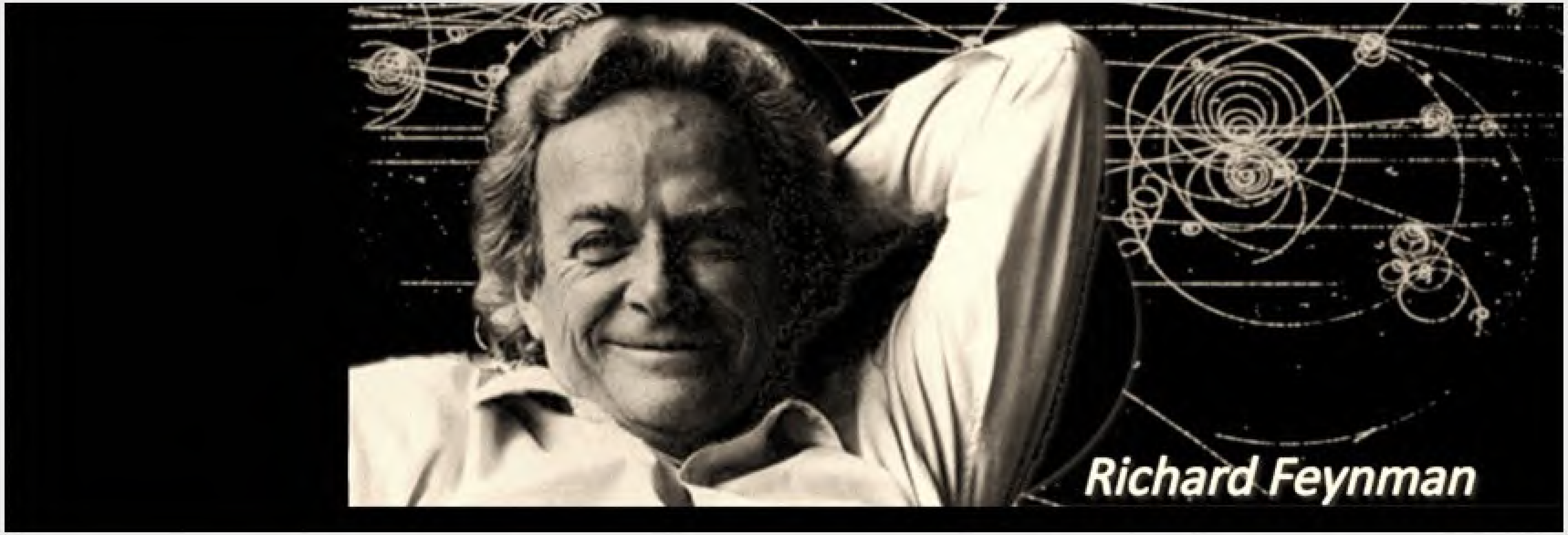
Numerical Calculations

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2022



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

دانشگاه خوارزمی

درس دوم

آنالیز خطا- بخش دوم

Error Analysis-part2

دانشگاه خوارزمی

تعریف: اگر مقدار واقعی عددی برابر با A باشد، و a مقداری تقریبی برای آن باشد، **خطای مطلق** a نسبت به A

را به شکل زیر تعریف می کنیم:

مقدار واقعی — مقدار تقریبی

خطای مطلق — $|\Delta A| = E(a) = |A - a|$ خطای مطلق، منحصر به فرد است

اگر $a < A$ باشد، a را تقریب نقصانی (کوچک‌تر) A می نامیم.

اگر $a > A$ باشد، a را تقریب اضافی (بزرگ‌تر) A می نامیم.

تقریب نقصانی و اضافی برای عدد π :

$$3.14 < \pi < 3.15$$

دانشگاه خوارزمی

کران خطای مطلق E_a : کران خطای مطلق عددِ a ، عددی است که از خطای مطلق عدد a کوچک‌تر نباشد: $E(a) \le E_a$

$$\left| A - a \right| \le E_a$$

کران خطای مطلق، منحصر به‌فرد نیست

$$E(a) = \left| \sqrt{2} - 1.41 \right| = ?$$

$$E_a = 0.1 \quad \text{or} \quad 0.01$$

$$\left| A - a \right| \le E_a \quad \Rightarrow \quad -E_a \le A - a \le E_a \quad \Rightarrow \quad a - E_a \le A \le a + E_a$$

$$A = a \pm E_a$$

دانشگاه خوارزمی

قضیه: اگر مقدار واقعی عددی برابر با A باشد، و a مقداری تقریبی برای A تا n رقم اعشار باشد، آن‌گاه کران بالای خطای مطلق برابر است با 0.5×10^{-n}

$$\left|A-a\right|\le 0.5\times10^{-n}$$

مثال: عدد 2.369 تقریبی از عدد 2.368700 با دقت سه رقم اعشار است. $E(a)=0.0003$ و بنابر این نامساوی زیر برقرار است

$$\left|2.368700-2.369\right|\le 0.5\times10^{-3}$$

مثال: برای عدد $\frac{1}{7}$ یک تقریب نقصانی و یک تقریب اضافی با سه رقم اعشار بنویسید. $\frac{1}{7}\approx 0.142857$

تقریب اضافی $a_1=0.143$

$$E(a_1)=0.143-\frac{1}{7}=\frac{143}{1000}-\frac{1}{7}=\frac{1}{7000}$$

تقریب نقصانی $a_2=0.142$

$$E(a_2)=\frac{1}{7}-0.142=\frac{1}{7}-\frac{142}{1000}=\frac{6}{7000}$$

تعریف: اگر مقدار واقعی عددی برابر با A باشد، واگر a مقداری تقریبی برای عدد A باشد، **خطای نسبی** A را به شکل زیر تعریف می کنیم:

خطای نسبی

$$\delta(a) = \left|\frac{A-a}{A}\right| = \frac{|\Delta A|}{|A|} = \frac{E(a)}{|A|}$$

درصد خطا

$$\delta(a) = \left|\frac{A-a}{A}\right| \times 100 = \frac{E(a)}{|A|} \times 100$$

دانشگاه خوارزمی

مثال: اگر $A = \frac{1}{3}$ باشد و $a_1 = 0.33$ یک تقریب نقصانی و $a_2 = 0.34$ یک تقریب اضافی برای عدد A باشد،

$$\boxed{E(a_1) = \left|\frac{1}{3} - 0.33\right| = \frac{1}{300}} \quad \boxed{E_{a_1} = 0.004} \quad \boxed{\delta(a_1) = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{100}} \quad \boxed{\delta(a_1) \times 100 = 1\%}$$

$$\boxed{E(a_2) = \left|\frac{1}{3} - 0.34\right| = \frac{2}{300}} \quad \boxed{E_{a_2} = 0.007} \quad \boxed{\delta(a_2) = \frac{\frac{2}{300}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{100}} \quad \boxed{\delta(a_1) \times 100 = 2\%}$$

دانشگاه خوارزمی

خطای مطلق و خطای نسبی را به شکل زیر تعریف کردیم.

$$E = \left|\text{true value-approximation}\right|$$

$$\delta = \left|\frac{\text{true value - approximation}}{\text{true value}}\right| \times 100$$

اما در موارد عملی مقدار واقعی در دسترس نیست. برای محاسبه‌ی خطا معمولاً از روش‌های تکرار استفاده می کنیم:

$$\epsilon_a = \left|\frac{\text{present approximation - previous approximation}}{\text{present approximation}}\right| \times 100$$

در روش تکرار محاسبات تا آن‌جا تکرار می‌شوند که مقدار فوق از یک مقدار مشخص (که به آن معیار توقف می گوییم) کم‌تر باشد:

$$\epsilon_a < \epsilon_s$$

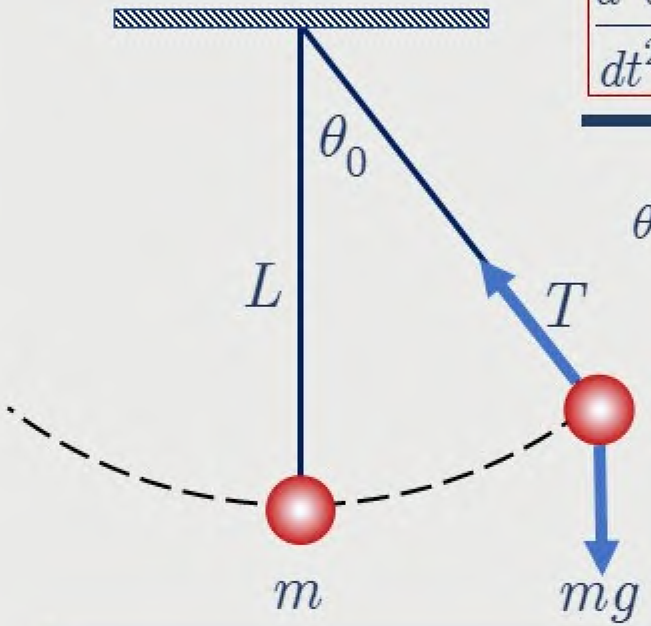
اگر معیار توقف به شکل زیر انتخاب شود، دقت محاسبات (حداقل) تا n رقم معنی‌دار است

$$\epsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n}) \times 100\%$$

دانشگاه خوارزمی

- ❑ خطا در مدل و داده‌های اولیه
- ❑ خطا در نمایش اعداد (خطای گرد کردن)
- ❑ خطای برشی
- ❑ انتشار خطا

دانشگاه خوارزمی



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

$\theta \ll 1\,rad \quad \Rightarrow \quad \sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\omega t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad g = 4\pi^2\frac{L}{T_0^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\right)^2 \sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}\right]$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \cdots\right]$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2 = 0$$

```
>>> from math import *
>>> (sqrt(2))**2-2
4.440892098500626e-16
>>>
```

$$c = \exp(1) = 0.27182818285\cdots \times 10^{-1}$$

نمایش ممیز شناور این عدد با گرد کردن تا ۷ رقم اعشار

$$f_l(c) = 0.2718282 \times 10^1 = 2.718282$$

نمایش ممیز شناور این عدد با قطع کردن تا ۷ رقم اعشار

$$f_l(c) = 0.2718281 \times 10^1 = 2.718281$$

یک کران بالا برای خطای نسبی در تقریب عدد به روش گرد کردن تا k رقم اعشار برابر است با

$$\left|\frac{x - f_l(x)}{x}\right| \le 0.5 \times 10^{-k}$$

یک کران بالا برای خطای نسبی در تقریب عدد به روش قطع کردن تا k رقم اعشار برابر است با

$$\left|\frac{x - f_l(x)}{x}\right| \le 10^{-k}$$

دانشگاه خوارزمی

یادآوری بسط تیلور یک تابع: اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده و $n+1$ بار مشتق‌پذیر باشد، به ازای $x, x_0 \in [a,b]$ داریم:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

باقی‌مانده یا خطای برشی

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{1!} + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{h^k}{k!}$$

$$\boxed{h = x - x_0}$$

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi_x)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \qquad x_0 < \xi_x < x$$

رابطه‌ی فوق را بسط تیلورِ تابع f حول x_0 می‌نامیم

اگر $x_0 = 0$ باشد، آن را بسط مک‌لوران می نامیم.

$$c^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}c^{\xi_x}$$

$$0 < \xi_x < x$$

مثال: مقدار $c^{\frac{\pi}{10}}$ را تا دو رقم اعشار (2D) حساب کنید

$$c^{\frac{\pi}{10}} = 1 + \frac{\pi}{10} + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!} + \cdots + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^{n+1}}{(n+1)!}c^{\xi_x}$$

$$0 < \xi_x < \left(\frac{\pi}{10}\right) < 0.315$$

$$0 < c^{\xi_x} < 2$$

$$\text{error} \le \left| \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^{n+1}}{(n+1)!}c^{\xi_x} \right| < \frac{(0.315)^{n+1}}{(n+1)!} \times 2$$

از سوی دیگر از آن‌جا که می‌خواهیم عدد مزبور را تا دو رقم اعشار محاسبه کنیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{(0.315)^{n+1}}{(n+1)!} \times 2 < 0.5 \times 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad n \ge 3$$

$$c^{\frac{\pi}{10}} \approx 1 + 0.315 + \frac{(0.315)^2}{2!} + \frac{(0.315)^3}{3!} = 1.37$$

```
>>> from math import exp
>>> exp(pi/10)
1.369107770624847
```

فرض کنید A یک عدد حقیقی و a مقدار تقریبی آن باشد و B نیز یک عدد حقیقی و b مقدار تقریبی آن باشد

$$\Delta(A-B)=?\quad \Delta(A\times B)=?$$

$$\Delta(A+B)=?\quad \Delta\left(\frac{A}{B}\right)=?$$

$$\boxed{\begin{aligned}E(a)&=|A-a|\\E(b)&=|B-b|\end{aligned}}\qquad \boxed{\begin{aligned}A&=a+\Delta a\\B&=b+\Delta b\end{aligned}}\qquad \boxed{\begin{aligned}E(a)&=|\Delta a|\\E(b)&=|\Delta b|\end{aligned}}$$

$$\boxed{A-B=a+\Delta a-b-\Delta b=(a-b)+(\Delta a-\Delta b)}$$

$$\boxed{C=A-B}\qquad \boxed{C=c+\Delta c}\qquad \boxed{|\Delta c|\le|\Delta a|+|\Delta b|}$$

مثال:

$$|A-4.56|\le 0.14$$

$$|B-1.23|\le 0.03$$

$$C=A-B\qquad |C-3.33|\le 0.17$$

خطای نسبی

فرض کنید A یک عدد حقیقی و a مقدار تقریبی آن باشد و B نیز یک عدد حقیقی و b مقدار تقریبی آن باشد

$$\boxed{C = A \pm B} \qquad \boxed{C = c + \Delta c} \qquad \boxed{|\Delta c| \le |\Delta a| + |\Delta b|}$$

$$\delta c = \left|\frac{\Delta c}{C}\right| = ? \qquad \delta c = \left|\frac{\Delta c}{C}\right| \le \frac{|\Delta a| + |\Delta b|}{|A \pm B|}$$

توجه: ارزیابی خطا برای تفریق
دو عدد که خیلی نزدیک به هم

$$A \approx B \qquad C = A - B$$

$$\Delta a = A\delta a$$

$$\Delta b = B\delta b \approx A\delta b$$

$$\delta c = \left|\frac{\Delta c}{C}\right| \le \frac{|\Delta a| + |\Delta b|}{|A - B|}$$

$$\boxed{\delta c = \left|\frac{\Delta c}{C}\right| \le \left(|\delta a| + |\delta b|\right)\frac{A}{|A - B|}}$$

دانشگاه خوارزمی

توجه: ارزیابی خطا برای تفریق دو عدد که خیلی نزدیک به هم

مثال:

$$\left|A - 1.25\right| \le 0.03$$

$$\left|B - 1.20\right| \le 0.03$$

$$\delta a \approx \frac{0.03}{1.25} = 0.024 = 2.4\%$$

$$\delta b \approx \frac{0.03}{1.20} = 0.025 = 2.5\%$$

$$\left|\delta c\right| \le \left(0.024 + 0.025\right)\frac{1.25}{0.05} = 1.225 > 100\% \ !!!$$

دانشگاه خوارزمی

مثال:

توابع $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ از لحاظ جبری یکی هستند

فرض کنید $f(500)$ و $g(500)$ را با کامپیوتری که محاسبات را تا ۵ رقم اعشار انجام می دهد، محاسبه کنیم.

$$\boxed{f(500)=\sqrt{501}-\sqrt{500}=22.383-22.361=0.22\times 10^{-1}}$$

دارای دو رقم با معنی است

$$\boxed{g(500)=\frac{1}{\sqrt{501}+\sqrt{500}}=\frac{1}{22.383+22.361}=0.22349\times 10^{-1}}$$

دارای پنج رقم با معنی است

دانشگاه خوارزمی

مثال:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}$$

```python
from math import sqrt
def f(x):
    return 1/(sqrt(x**2 + 1) - x)
xs = [10**i for i in range(1,8)]
ys = [f(x) for x in xs]
for x, y in zip(xs, ys):
    print(x,"      ", y)
```

```
10         20.04987562112102
100         200.00499987504887
1000         2000.0004998147572
10000         19999.99977764674
100000         200000.22333140278
1000000         1999984.77112922
10000000         19884107.85185185
```

```
>>> f(10**8)


ZeroDivisionError: float division by zero
```

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \sqrt{x^2+1} + x$$

```
10                20.04987562112089
100                200.00499987500626
1000                2000.000499999875
10000                20000.00005000002
100000                200000.0000049998
1000000                2000000.0000005001
10000000                20000000.000000052
```

فرض کنید A یک عدد حقیقی و a مقدار تقریبی آن باشد و B نیز یک عدد حقیقی و b مقدار تقریبی آن باشد

$$\Delta\left(A\times B\right)=?$$
$$\Delta\left(\frac{A}{B}\right)=?$$

$$C=A\times B$$
$$c=a\times b$$

$$\delta a=\left|\frac{A-a}{A}\right|$$

$$a=A\left(1+\delta a\right)$$
$$b=B\left(1+\delta b\right)$$

$$\Delta c=C-c=AB-ab=AB-(A+\Delta a)(B+\Delta b)\approx -A\Delta b-B\Delta a$$

$$\delta c=\left|\frac{\Delta c}{C}\right|=\left|\frac{C-c}{C}\right|=\left|\frac{A\Delta b+B\Delta a}{AB}\right|=\left|\frac{\Delta a}{A}+\frac{\Delta b}{B}\right|\le\delta a+\delta b$$

همین رابطه برای تقسیم هم برقرار است

دانشگاه خوارزمی

مثال:

$$\left|A - 1.25\right| \leq 0.03$$

$$\left|B - 1.20\right| \leq 0.03$$

$$\delta a \approx \frac{0.03}{1.25} = 0.024 = 2.4\%$$

$$\delta b \approx \frac{0.03}{1.20} = 0.025 = 2.5\%$$

$$C = AB$$

$$\left|\delta c\right| \leq \left(0.024 + 0.025\right) = 0.049 = 4.9\%$$

دانشگاه خوارزمی

دیدیم که هر عمل محاسباتی همراه با خطای انتشار است. لازم است سعی کنیم از حجم محاسبات بکاهیم.

$$\boxed{y = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}$$

برای محاسبه‌ی این عبارت ۱۴ عمل انجام می‌شود

$$\boxed{y = a_0 + x\Big(a_1 + x\Big(a_2 + x(a_3 + a_4x)\Big)\Big)}$$

برای محاسبه‌ی این عبارت ۸ عمل انجام می‌شود

شاد و مهربان باشید