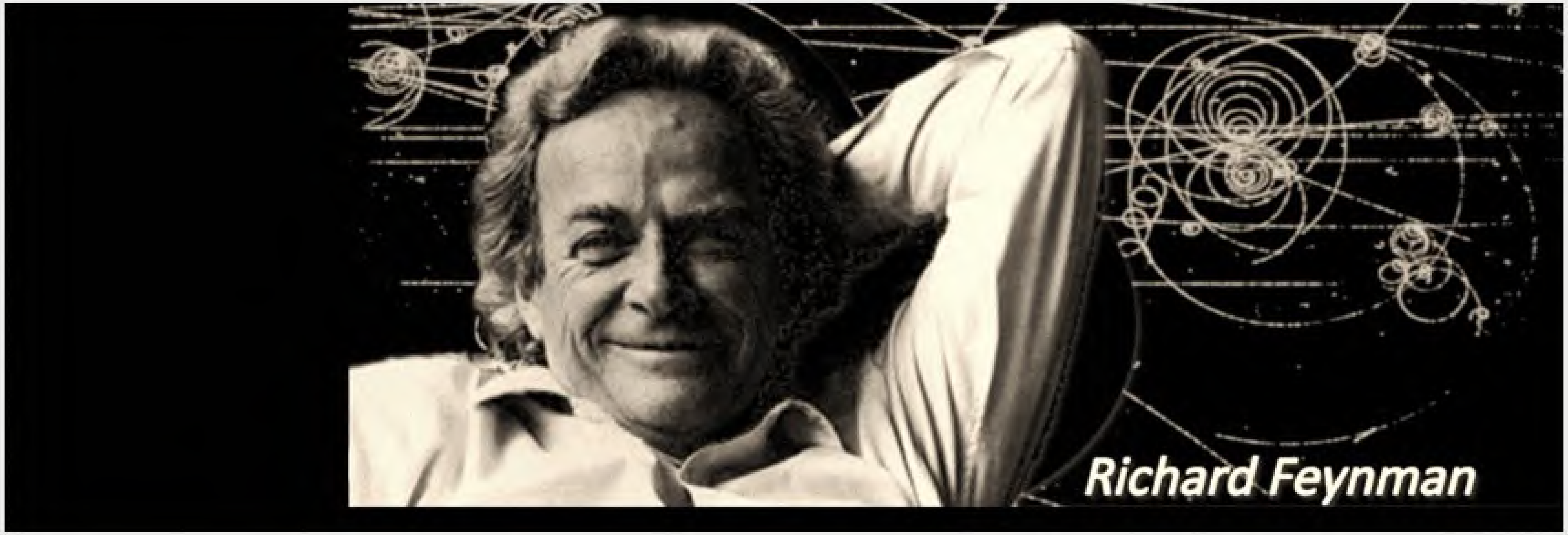
Numerical Calculations

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2022



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

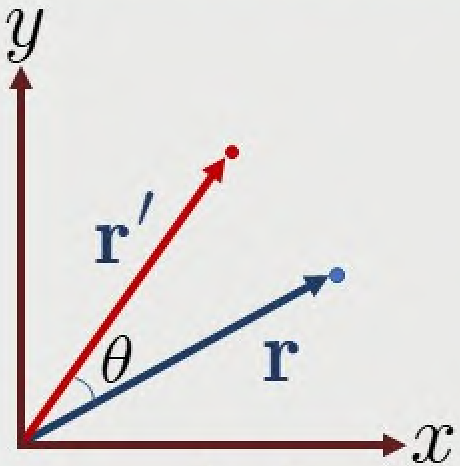
درس چهارم

ماتریس

Matrices

دانشگاه خوارزمی

مباحث مربوط به جبر خطی را در بسیاری از بخش های فیزیک می‌بینیم.



اگر $\mathbf{r}'$ معلوم باشد برای یافتن $\mathbf{r}$ باید این دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی را حل کنیم.

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

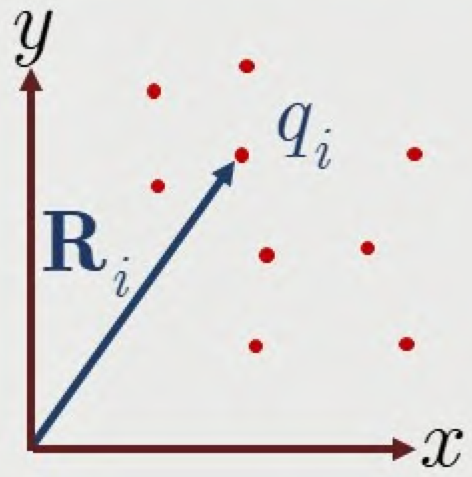
$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ماتریس دوران در فضای اقلیدسی

پتانسیل الکتریکی مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای



فرض کنید n بار الکتریکی مجهول q_i داریم که در مکان‌های R_i قرار دارند. فرض کنید پتانسیل الکتریکی را در n نقطه r_i می‌دانیم

$$\boxed{\Phi(r_i) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_j|}\right)q_j \qquad i = 0,1,2,\cdots,n-1}$$

مثلا اگر چهار ذره داشته باشیم

$$\begin{pmatrix}\Phi(\mathbf{r}_0)\\ \Phi(\mathbf{r}_1)\\ \Phi(\mathbf{r}_2)\\ \Phi(\mathbf{r}_3)\end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} \frac{1}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{R}_0|} & \frac{1}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{R}_1|} & \frac{1}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{R}_2|} & \frac{1}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{R}_3|}\\ \frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{R}_0|} & \frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{R}_1|} & \frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{R}_2|} & \frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{R}_3|}\\ \frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{R}_0|} & \frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{R}_1|} & \frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{R}_2|} & \frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{R}_3|}\\ \frac{1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{R}_0|} & \frac{1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{R}_1|} & \frac{1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{R}_2|} & \frac{1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{R}_3|} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix}$$

باید این معادلات را برای یافتن چهار مجهول q_0 و q_1 و q_2 و q_3 حل کنیم.

دانشگاه خوارزمی

تانسور لختی دورانی

برای بررسی دوران یک جسم صلب حول یک محور خاص در فضای سه بعدی عناصر تانسور لختی دورانی را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\boxed{I_{ij} = \int \rho(\mathbf{r})(\delta_{ij} r^2 - x_i x_j) d^3 r}$$

چگالی جرمی

نماد کرونکر

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \qquad I_{ij} = I_{ji} \quad for\ i \neq j$$

می‌توان دستگاه مختصاتی را انتخاب کرد که این ماتریس قطری باشد. چنین محورهای مختصاتی را محورهای اصلی جسم می‌نامیم.

$$\mathbf{I}_p = \begin{pmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

یعنی یافتن محورهای اصلی جسم معادل قطری کردنِ ماتریس تانسور لختی دورانی است (مسئله‌ی ویژه مقداری).

ماتریس، آرایه‌ای منظم از اعداد حقیقی یا مختلط است که در سطرها و ستون‌های مشخصی مرتب شده‌اند.

یک ماتریس $n \times m$ به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

تعداد سطرها

تعداد ستون‌ها

عنصر یا درایه‌ی ماتریس

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0m-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,m-1} \end{pmatrix}$$

اگر ماتریسی فقط یک سطر داشته باشد، آن را ماتریسِ سطری یا بردارِ سطری می‌نامیم.

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

اگر ماتریسی فقط یک ستون داشته باشد، آن را ماتریسِ ستونی یا بردارِ ستونی می‌نامیم.

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

اگر تعدادِ سطرها و ستون‌های یک ماتریس برابر باشند، آن را ماتریس مربعی می‌نامیم.

در ماتریس مربعیِ $\mathbf{A}$ با n سطر و n ستون، عناصرِ $a_{00}, a_{11}, \cdots, a_{n-1,n-1}$ را قطرِ اصلیِ ماتریسِ $\mathbf{A}$ می‌نامیم.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

مثلاً ماتریس زیر یک ماتریس مربعی 3×3 است:

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

دانشگاه خوارزمی

ماتریس بالامثلثی: اگر در یک ماتریس مربعی تمام عناصرِ زیرِ قطر اصلی صفر باشند، آن را ماتریس بالامثلثی می‌نامیم. ماتریس زیر یک ماتریس بالامثلثی است:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ماتریس پایین‌مثلثی: اگر در یک ماتریس مربعی تمام عناصرِ بالای قطر اصلی صفر باشند، آن را ماتریس پایین‌مثلثی می‌نامیم.

ماتریس زیر یک ماتریس پایین‌مثلثی است:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

ماتریس قطری: ماتریسی که همه ی عناصرِ غیرِ قطری آن صفر باشند، یعنی هم بالامثلثی و هم پایین‌مثلثی باشد، ماتریس قطری نامیده می‌شود.

ماتریس همانی: ماتریس قطری که همه‌ی عناصرِ قطرِ آن برابر با ۱ باشد، ماتریس همانی یا ماتریس واحد نامیده می‌شود. ماتریس زیر یک ماتریس همانیِ مرتبه‌ی n است:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ترانهاده‌ی یک ماتریس: اگر در یک ماتریس، جای سطر و ستون را با هم عوض کنیم، ماتریسی به دست می‌آید که آن را ترانهاده‌ی ماتریسِ نخست می‌نامیم. اگر A یک ماتریس $n \times m$ باشد، ترانهاده‌ی آن ماتریسی $m \times n$ است. ترانهاده‌ی ماتریس را با حرف T مشخص می‌کنیم: $\left(a_{ij}\right)^T = \left(a_{ji}\right)$

مثلاً

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,m-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,m-1} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & \cdots & b_{0,m-1} \\ b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,0} & b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,m-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{00}+b_{00} & a_{01}+b_{01} & \cdots & a_{0,m-1}+b_{0,m-1} \\ a_{10}+b_{10} & a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1,m-1}+b_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0}+b_{n-1,0} & a_{n-1,1}+b_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,m-1}+b_{n-1,m-1} \end{pmatrix}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A} = \alpha\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0m-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{00} & \alpha a_{01} & \cdots & \alpha a_{0m-1} \\ \alpha a_{10} & \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n-1,1} & \alpha a_{n-1,2} & \cdots & \alpha a_{n-1,m-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{b_{ij} = \alpha a_{ij}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a_{00} & -a_{01} & \cdots & -a_{0m-1} \\ -a_{10} & -a_{11} & \cdots & -a_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & -a_{n-1,m-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0m-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,m-1} \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & \cdots & b_{0m-1} \\ b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,m-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{00} - b_{00} & a_{01} - b_{01} & \cdots & a_{0,m-1} - b_{0,m-1} \\ a_{10} - b_{10} & a_{11} - b_{11} & \cdots & a_{1,m-1} - b_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} - b_{n-1,0} & a_{n-1,1} - b_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,m-1} - b_{nn-1,m-1} \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

$$\left(A\right)_{n\times m}\left(B\right)_{m\times p}=\left(C\right)_{n\times p}$$

$$\boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}}$$

مثال زیر چگونگی ضرب ماتریس‌ها را نشان می دهد:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times5+2\times3 & 1\times4+2\times2\\ 3\times5+5\times3 & 3\times4+\times5\times2\\ 4\times5+1\times3 & 4\times4+2\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 8\\ 30 & 22\\ 23 & 18\end{pmatrix}$$

واضح است که حاصل‌ضرب ماتریسی در حالت کلی دارای خاصیت جابجایی نیست:

$$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$$

در مورد اعداد، با مفهوم وارونِ یک عدد آشنا هستیم. وارونِ هر عدد به شکلی تعریف می‌شود که حاصل‌ضربِ هر عدد در وارونش برابر با 1 می‌شود. مثلاً وارونِ عدد 5 را به شکلِ $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$ می‌نویسیم و $5 \times 5^{-1} = 1$

ماتریس مربعی $\mathbf{A}$ با مرتبه‌ی $n \times n$ وارون پذیر است هرگاه بتوان ماتریس مربعی $\mathbf{B}$ با مرتبه‌ی $n \times n$ را به گونه‌ای یافت که حاصل ضربِ آن با $\mathbf{A}$ برابر با ماتریس همانی شود. در این صورت $\mathbf{B}$ را وارون $\mathbf{A}$ می‌نامیم و با نماد $\mathbf{A}^{-1}$ نشان می‌دهیم

$$\boxed{\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n; \qquad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}}$$

وارونِ ماتریس $\mathbf{A}$ را می‌توان به شکل زیر محاسبه کرد:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{A})} adj(\mathbf{A})$$

ماتریسی وارون‌پذیر است که دترمینان آن مخالف صفر باشد.

دانشگاه خوارزمی

$$
\begin{array}{llll}
a_{00}x_0 & + \; a_{01}x_1 & + \dots + a_{0,n-1}x_{n-1} & = b_0 \\
a_{10}x_0 & + \; a_{11}x_1 & + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} & = b_1 \\
a_{20}x_0 & + \; a_{21}x_1 & + \dots + a_{2,n-1}x_{n-1} & = b_2 \\
\vdots & \qquad\quad \vdots & \qquad \vdots & \\
a_{n-1,0}x_0 & + \; a_{n-1,1}x_1 & + \dots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} & = b_n
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\
a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1}
\end{pmatrix}
$$

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}}$$

این دستگاه معادلات دارای جواب یکتاست اگر و فقط اگر $det(A) \neq 0$

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}}$$

$$\mathbf{S} = \left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{b}\right)$$ **ماتریس افزوده:**

$$\mathbf{S} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} & b_0 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & b_{n-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \end{array}\right)$$

elementary row operations

۱ - می‌توان یک سطر (معادله) را در یک عدد ضرب کرد (ضرب یک سطر ماتریس افزوده در یک عدد) (دترمینان A در آن عدد ضرب می‌شود)

۲ - می‌توان جای دو سطر (معادله) را با هم عوض کرد. (تعویض دو سطر با هم در ماتریس افزوده) (تغییر علامت دترمینان A)

۳ - می‌توان یک سطر (معادله) را در یک عدد ضرب و با سطر (معادله‌ی) دیگر جمع کرد. (ضرب یک سطر در یک عدد و جمع با سطر دیگر در ماتریس افزوده) (دترمینان A تغییر نمی‌کند)

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}}$$

eigenvalue — *eigenvector*

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

ماتریس واحد $n \times n$

$$\boxed{\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{v} = \mathbf{0}}$$

ماتریس صفر $n \times 1$ (بردار ستونی)

$$\boxed{\left(\lambda, v_0, v_1, \cdots v_{n-1}\right)}$$

مجهولات

برای این که جوب غیر بدیهی داشته باشیم

$$\boxed{\det\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right) = 0}$$

$$\boxed{(-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0}$$

یعنی برای λ به تعداد n ریشه وجود دارد. ممکن است ریشه‌ها همه متمایز باشند یا برخی از آن‌ها چند بار تکرار شود.

$$\boxed{\left(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}\right)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}}$$

البته به ازای هر λ پاسخ $\mathbf{v}$ منحصر به فرد نیست.

دانشگاه خوارزمی

دو گزینه برای تحلیل خطا

روش پیشینی ($priori$): در این روش ابتدا تلاش می کنیم یک راه مناسب برای حل مسئله پیدا کنیم.

روش پسینی ($posteriori$): ابتدا یک راه حل ارائه می دهیم بعد بررسی می کنیم ببینیم پاسخ‌ها چقدر خوب هستند.

روش دوم را بررسی می کنیم.

$$\begin{pmatrix} 0.2161 & 0.1441 \\ 1.2969 & 0.8648 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.144 \\ 0.8642 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2161 & 0.1441 & 0.1440 \\ 1.2969 & 0.8648 & 0.8642 \end{array}\right)$$

فرض کنید جواب تقریبی زیر را به دست آورده‌ایم. می خواهیم ببینیم این جواب چقدر خوب است.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0.9911 \\ -0.4870 \end{pmatrix}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0.9911 \\ -0.4870 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}}$$

باقی‌مانده

$$\boxed{\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0.2161 & 0.1441 \\ 1.2969 & 0.8648 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9911 \\ -0.4870 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.144 \\ 0.8642 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10^{-8} \\ +10^{-8} \end{pmatrix}}$$

اما

$$\boxed{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} +2 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

ببینیم آیا می‌توانستیم از اول بفهمیم مشکل مسئله کجاست؟

دانشگاه خوارزمی

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2161 & 0.1441 & 0.1440 \\ 1.2969 & 0.8648 & 0.8642 \end{array}\right)$$

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

اختلال کوچکی در مسئله ایجاد می کنیم. می خواهیم ببینیم چه تغییری در پاسخ مسئله ایجاد می کند. فرض کنید پاسخ به اندازه‌ی Δx باشد.

$$\left(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\right) = \mathbf{b}$$

$$\left(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\right) = \begin{pmatrix} -2.3129409051813273 \times 10^{-4} \\ 9.99653058864692 \times 10^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.001 \end{pmatrix}$$

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1.001 & 2.001 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

جواب مسئله

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{pmatrix}$$

$$\left(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\right) = \mathbf{b}$$

$$\left(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\right) \approx \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

اختلال 0.1%

خطای 50%

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{array}\right)}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$ جواب مسئله

$$\boxed{\Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.01 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\left(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\right) = \mathbf{b}}$$

$$\boxed{\left(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\right) \approx \begin{pmatrix} -1.003344481605351 \\ 4.006688963210702 \end{pmatrix}}$$

اختلال 1%

خطای 0.5%

دانشگاه خوارزمی

بررسی اندازه‌ی دترمینان ماتریس ضرایب

در مثال اول:
که حساسیت خیلی بالا بود

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}0.2161 & 0.1441 & 0.1440\\ 1.2969 & 0.8648 & 0.8642\end{array}\right)$$

$$\det(\mathbf{A})=\begin{vmatrix}0.2161 & 0.1441\\ 1.2969 & 0.8648\end{vmatrix}=-1\times10^{-8}$$

در مثال دوم:
که باز هم حساسیت بالا بود

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 2\\ 1 & 1.001 & 2.001\end{array}\right)$$

$$\det(\mathbf{A})=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.001\end{vmatrix}=0.001$$

در مثال سوم:
که حساسیت پایین بود

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 7\end{array}\right)$$

$$\det(\mathbf{A})=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$$

در نگاه نخست دیده می‌شود که اگر دترمینان ماتریس ضرایب کوچک باشد سیستم به اختلالات کوچک بسیار حساس است. ببینیم آیا این نتیجه درست است؟ آیا مقدار دترمینان ماتریس ضرایب معیار خوبی برای تعیین حساسیت سیستم هست؟

دانشگاه خوارزمی

در مثال سوم سیستم نسبت به اختلال کوچک حساس نبود.

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \qquad \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

می‌دانیم که می‌توان طرفین معادلاتِ یک دستگاه معادلات را در یک عدد ضرب کرد. اگر معادله‌ی فوق را در 0.1 ضرب کنیم ماتریس ضرایب به شکل زیر خواهد بود

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{array}\right) \qquad \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{vmatrix} = 0.03$$

دیده می‌شود که دترمینان کوچک است اما سیستم پایدار است.

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی