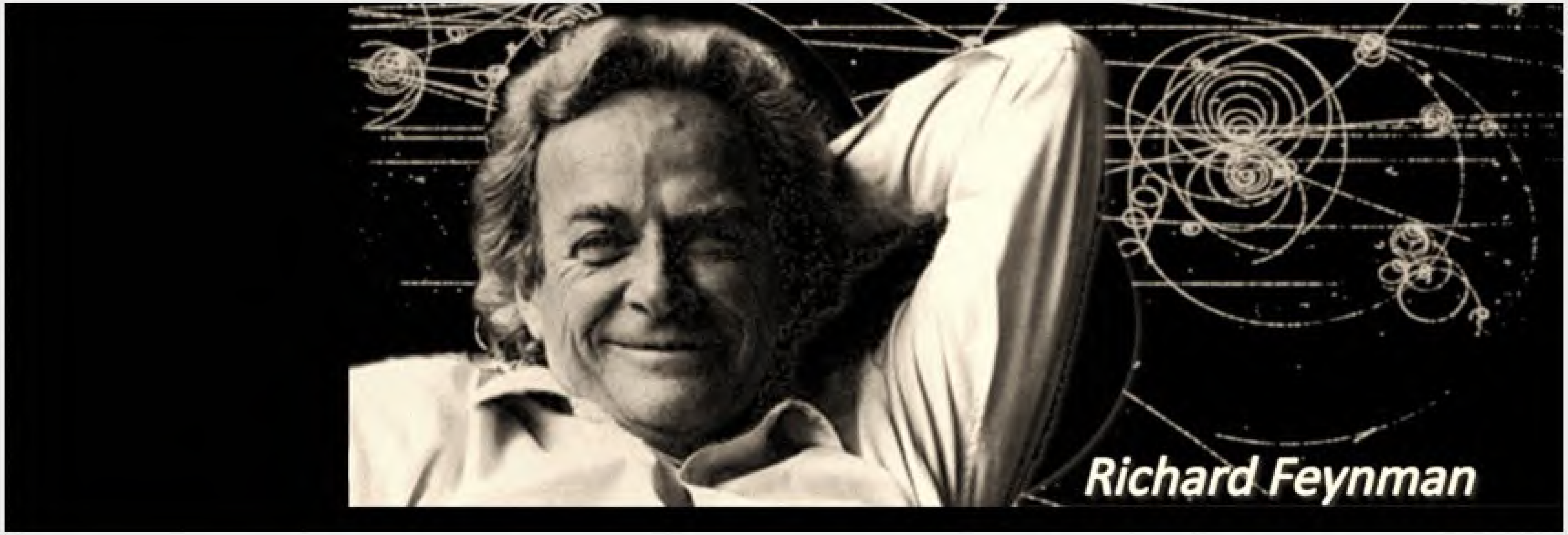
Numerical Calculations

Faculty of Physics – Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2022



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس پنجم

ماتریس- بخش دوم

Matrices-part2

دانشگاه خوارزمی

Euclidean-norm (Frobenius-norm)

$$\left\|\mathbf{A}\right\|_E = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left|A_{ij}\right|^2}$$

1-norm (maximum row-sum norm)

$$\left\|\mathbf{A}\right\|_1 = \max_{0\le j\le n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\left|A_{ij}\right|$$

Infinity-norm (maximum row-sum norm)

$$\left\|\mathbf{A}\right\|_\infty = \max_{0\le i\le n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left|A_{ij}\right|$$

دانشگاه خوارزمی

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\|\mathbf{A}\right\|_1 = \max\left(8,7,5\right) = 8$$

$$\left\|\mathbf{A}\right\|_\infty = \max\left(11,6,3\right) = 11$$

$$\left\|\mathbf{A}\right\|_E = \sqrt{25+16+4+1+4+9+4+1+0} = 64 = 8$$

$$\boxed{\left\| \mathbf{A} \right\| \geq 0}$$

$$\boxed{\left\| \mathbf{A} \right\| = 0 \quad \text{if and only if } A_{ij} = 0}$$

$$\boxed{\left\| k\mathbf{A} \right\| = \left| k \right| \left\| \mathbf{A} \right\|}$$

$$\boxed{\left\| \mathbf{A} + \mathbf{B} \right\| \leq \left\| \mathbf{A} \right\| + \left\| \mathbf{B} \right\|}$$ *triangle inequality*

$$\boxed{\left\| \mathbf{AB} \right\| \leq \left\| \mathbf{A} \right\| \left\| \mathbf{B} \right\|}$$

دانشگاه خوارزمی

بر می‌گردیم به پرسش مربوط به کوچک بودنِ دترمینان یک ماتریس.

به نظر می‌آید منطقی است اگر شرط زیر برقرار باشد دترمینان را کوچک قلمداد کنیم.

$$\boxed{\left|\det(\mathbf{A})\right| \ll \left\|\mathbf{A}\right\|}$$

برای مثال‌های درس چهارم داریم:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2161 & 0.1441 \\ 1.2969 & 0.8648 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\|\mathbf{A}\right\|_E \approx 1.58 \quad \det(\mathbf{A}) \approx 10^{-8} \quad \det(\mathbf{A}) \ll \left\|\mathbf{A}\right\|_E$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\|\mathbf{A}\right\|_E \approx 2 \quad \det(\mathbf{A}) \approx 0.001 \quad \det(\mathbf{A}) \ll \left\|\mathbf{A}\right\|_E$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\|\mathbf{A}\right\|_E \approx 3.16 \quad \det(\mathbf{A}) = 3 \quad \det(\mathbf{A}) \not\ll \left\|\mathbf{A}\right\|_E$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\|\mathbf{A}\right\|_E \approx 0.32 \quad \det(\mathbf{A}) = 0.03 \quad \det(\mathbf{A}) \not\ll \left\|\mathbf{A}\right\|_E$$

دانشگاه خوارزمی

Condition Number for Linear Systems

می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا معیاری که برای پایداری سیستم بیان کردیم یعنی کوچک بودنِ دترمینان ماتریس ضرائب (نسبت به نرم آن) معیار خوبی است یا خیر.

قبلا دیدیم:

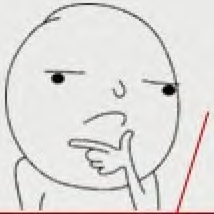
$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \longrightarrow \boxed{\left\|\mathbf{A}\right\|_E \approx 3.16} \quad \boxed{\det(\mathbf{A}) = 3} \quad \boxed{\det(\mathbf{A}) \not\ll \left\|\mathbf{A}\right\|_E}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\times 10^{-10} & 1\times 10^{-10} \\ 1\times 10^{-10} & 2\times 10^{-10} \end{pmatrix}} \longrightarrow \boxed{\left\|\mathbf{A}\right\|_E \approx 3.16\times 10^{-10}} \quad \boxed{\det(\mathbf{A}) = 3\times 10^{-20}} \quad \boxed{\det(\mathbf{A}) \ll \left\|\mathbf{A}\right\|_E}$$

اما برای این حالت هم تغییر یک درصدی در ورودی‌ها خطای کم‌تر از نیم درصد در پاسخ ایجاد می‌کند

مسئله‌ی زیر را در نظر می‌گیریم

$$
\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)=\left(\begin{array}{cccccccc|c}
2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1\\
0 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1\\
0 & 0 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1\\
0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & -2 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1
\end{array}\right)
\qquad
\mathbf{x}=\begin{pmatrix}-21\\-11\\-5\\-3\\-1\\-1\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}
$$



$$\boxed{\left\|\mathbf{A}\right\|_E\approx 12}\qquad\boxed{\det(\mathbf{A})=256}\qquad\boxed{\det(\mathbf{A})\gg\left\|\mathbf{A}\right\|_E}$$

مثال دیگر

اگر یک اختلال کوچک در عنصر پایین سمت چپ ماتریس A به اندازه‌ی 0.01- ایجاد کنیم:

$$\left(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)=\left(\begin{array}{cccccccc|c} 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1\\ -0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \qquad \mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\approx\begin{pmatrix}-30.88\\-15.94\\-7.47\\-4.24\\-1.62\\-1.31\\-0.15\\-0.65\end{pmatrix}$$

اختلال 0.5% در یکی از ۶۴ عنصر ماتریس ضرائب، منجر به خطای بیش از 64% در عناصر پاسخ شده است.

این ماتریس بسیار حساس است

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} \qquad \mathbf{Ax} + \Delta\mathbf{Ax} + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = -\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \qquad \Delta\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$$

با فرض این که A وارون پذیر باشد

$$\|\Delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{A}\|\|(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})\|$$

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{A}\| \qquad \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})\|} \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|$$

دانشگاه خوارزمی

$$\kappa(\mathbf{A}) = \left\| \mathbf{A}^{-1} \right\| \left\| \mathbf{A} \right\|$$

اگر عدد شرط بزرگ باشد، اختلال کوچک در ماتریس ضرائب منجر به تغییر بزرگ در پاسخ خواهد شد. در این صورت مسئله را بد وضع (ill-conditioned) می‌نامیم.

اگر عدد شرط از مرتبه‌ی ۱ باشد، اختلال کوچک در ماتریس ضرائب منجر به تغییر بزرگ در پاسخ نخواهد شد. در این صورت مسئله را خوش وضع (well-conditioned) می‌نامیم.

Numerical Calculations

$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2161 & 0.1441 \\ 1.2969 & 0.8648 \end{pmatrix}} \longrightarrow \boxed{\kappa(\mathbf{A}) = 249729267.388 \quad \text{ill-conditioned}}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{pmatrix}} \longrightarrow \boxed{\kappa(\mathbf{A}) = 4002.001 \quad \text{ill-conditioned}}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \longrightarrow \boxed{\kappa(\mathbf{A}) \approx 3.33 \quad \text{well-conditioned}}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}} \longrightarrow \boxed{\kappa(\mathbf{A}) \approx 3.33 \quad \text{well-conditioned}}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 \times 10^{-10} & 1 \times 10^{-10} \\ 1 \times 10^{-10} & 2 \times 10^{-10} \end{pmatrix}} \longrightarrow \boxed{\kappa(\mathbf{A}) \approx 3.33 \quad \text{well-conditioned}}$$

دانشگاه خوارزمی

Numerical Calculations

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right) = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\kappa(\mathbf{A}) \approx 512.18 \quad \text{ill-conditioned}}$$

دانشگاه خوارزمی

ماتریس۸ در۸ زیر را در نظر بگیرید.

$$(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = 10^{-8}} \qquad \boxed{\left\|\mathbf{A}\right\|_E \approx 0.6}$$

$$\boxed{\kappa(\mathbf{A}) \approx 23.24 \quad \text{well-conditioned}}$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی