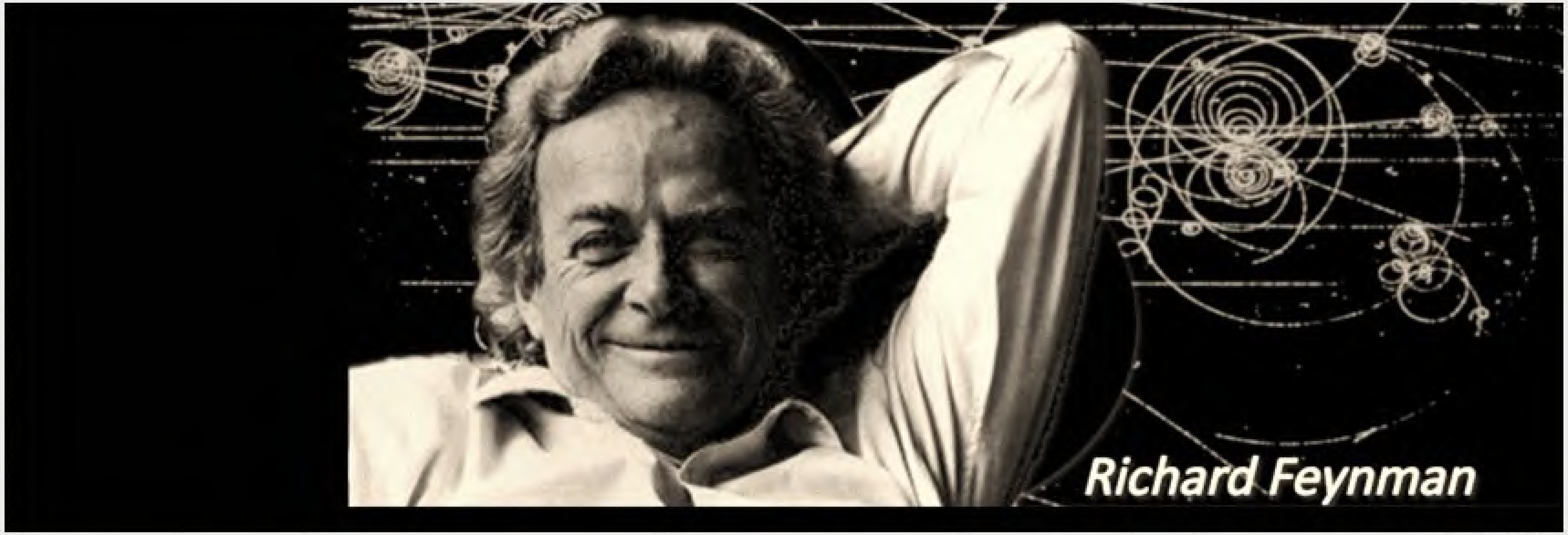
Numerical Calculations

Faculty of Physics – Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2022



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس هفتم

حل دستگاه معادلات خطی- بخش ۲

Solving Systems of Linear Equations-part2

دانشگاه خوارزمی

در روش حذف گاوس ساده دیدیم که اگر عنصر محور مساوی صفر باشد، الگوریتم متوقف می‌شود. برای پرهیز از توقف الگوریتم، یک راه این است که سطر محور را با سطر دیگری عوض کنیم به گونه‌ای که عنصر محور مخالف صفر شود. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱:

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)^{(0)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$a_{00}^{(0)} = 1$$

$$m_{10} = 2 \quad m_{20} = 1 \quad m_{30} = 1$$

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{0} & -1 & -1 & -4 \\ 0 & \boxed{0} & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

$$a_{22}^{(2)} = -1$$

$$m_{32} = -2$$

ادامه‌ی مثال ۱:

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

$$\boxed{a_{22}^{(2)} = -1}$$

$$\boxed{m_{32} = -2}$$

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

با جاگذاری پس‌رو جواب دستگاه معادلات به دست می‌آید:

$$x_0 = -7, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2$$

در این مثال با تعویض سطرها، مشکل روش حذف گاوس ساده برطرف شد.
اما اگر در سطرهای بعدی هم عنصر محور صفر باشد، تعویض سطرها مشکل روش حذف گاوس ساده را حل نمی‌کند. در چنین حالتی دستگاه معادلات دارای جواب نیست یا بی‌شمار جواب دارد

دانشگاه خوارزمی

مثال ۲:

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)^{(0)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$a_{00}^{(0)} = 1$

$m_{10} = 1$
$m_{20} = 2$
$m_{30} = -1$

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$a_{11}^{(1)} = 0$

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)^{(2)} = \left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$a_{22}^{(2)} = 1$

$m_{32} = -1$

$$\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{b}\right)^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

دستگاه معادلات به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ -x_3 + x_4 &= 1 \\ x_3 - 2x_4 &= -4 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 - x_1 \\ x_3 &= 2 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

دیده می‌شود که این دستگاه معادلات بی‌شمار جواب دارد

دانشگاه خوارزمی

مثال ۳:

$$\left(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\right)^{(0)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$a_{00}^{(0)} = 1$

$m_{10} = 1$
$m_{20} = 2$
$m_{30} = -1$

$$\left(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\right)^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$a_{11}^{(1)} = 0$

$$\left(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\right)^{(2)} = \left(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\right)^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$a_{22}^{(2)} = 1$

$m_{32} = -1$

$$\left(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\right)^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

دستگاه معادلات به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ -x_3 + x_4 &= -2 \\ x_3 - 2x_4 &= -4 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$-1 = 2 \quad ?!$

$x_3 = 2$

$x_4 = 3$

دیده می‌شود که این دستگاه جواب ندارد

دیدیم که اگر عنصرِ محور صفر باشد، الگوریتم حذف گاوس به مشکل برمی‌خورد. **علاوه بر این، اگر عنصر محور نسبت به دیگر عناصر ستونی که در آن قرار دارد خیلی کوچک باشد،** قدر مطلق ضرایب m_{ij} خیلی بزرگ خواهند بود و خطای گرد کردن در عملیات انجام شده برای صفر کردنِ عناصر ستون مورد نظر، بزرگ خواهد بود. برای رفع این مشکل، از روش محورگیری جزیی یا روش محور گیری وزنی (مقیاس شده) استفاده می‌کنیم.

مثال: محورگیری جزیی

$$\begin{aligned} 0.003x_0 + 59.14x_1 &= 59.17 \\ 5.291x_0 - 6.130x_1 &= 46.78 \end{aligned}$$

$$x_0 = 10, \quad x_1 = 1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.130 & 46.78 \end{array}\right)$$

$$a_{00} = 0.003$$

$$m_{10} = \frac{5.291}{0.003} = 1763.666\cdots \approx 1764$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{array}\right)$$

$$x_0 = -10, \quad x_1 = 1.001$$!?

ادامه‌ی مثال: محورگیری جزیی

عنصر محور به گونه‌ای انتخاب می کنیم که قدر مطلق آن
از قدر مطلق عناصر دیگر در آن ستون بزرگ‌تر باشد

$$\begin{aligned} 0.003x_0 + 59.14x_1 &= 59.17 \\ 5.291x_0 - 6.130x_1 &= 46.78 \end{aligned}$$

$$x_0 = 10, \quad x_1 = 1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.130 & 46.78 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.130 & 46.78 \\ 0.003 & 59.14 & 59.17 \end{array}\right)$$

$$a_{00} = 5.291$$

$$m_{10} = \frac{0.003}{5.291} = 0.0005670 \approx 0.0006$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.130 & 46.78 \\ 0 & 59.14 & 59.14 \end{array}\right)$$

$$x_0 = 10, \quad x_1 = 1$$

محورگیری وزنی (مقیاس شده)

در این روش ابتدا عنصر محور را نسبت به بزرگ‌ترین عنصر سطرخودش تراز می کنیم. عنصری که بزرگ‌ترین مقدار تراز شده را داراست به عنوان محور در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} 30x_0 + 59140x_1 &= 591700 \\ 5.291x_0 - 6.130x_1 &= 46.78 \end{aligned}$$

$$x_0 = 10, \quad x_1 = 1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 30 & 591400 & 591700 \\ 5.291 & -6.130 & 46.78 \end{array}\right)$$

$$\frac{30}{591400} = 0.00005073$$

$$\frac{5.291}{6.130} = 0.8631$$

$$0.8631 > 0.00005073$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.130 & 46.78 \\ 30 & 591400 & 591700 \end{array}\right)$$

$$x_0 = 10, \quad x_1 = 1$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

در این روش، هم عناصر زیر قطر را صفر می‌کنیم و هم عناصر بالای قطر را. یعنی ماتریس ضرایب را هم‌زمان بالا مثلثی و پایین مثلثی می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} & b_0 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & b_{n-1} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{a}_{00} & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_0 \\ 0 & \tilde{a}_{11} & \cdots & 0 & \tilde{b}_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{n-1,n-1} & \tilde{b}_{n-1} \end{array}\right)$$

$$x_0 = \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{a}_{00}}$$

$$x_1 = \frac{\tilde{b}_1}{\tilde{a}_{11}}$$

$$x_{n-1} = \frac{\tilde{b}_{n-1}}{\tilde{a}_{n-1,n-1}}$$

اگر عناصر قطر را برابر با یک کنیم، پاسخ معادلات همان b های نهایی هستند.

دانشگاه خوارزمی

مثال

دستگاه زیر را به روش گاوس- جردن حل کنید.

$$
\begin{aligned}
x_0 + x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
x_0 + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -10 \\
2x_0 + 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4 \\
3x_0 + 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= -10
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & -10 \end{array}\right)
$$

$$a_{00}^{(0)} = 1$$

$$
\begin{aligned}
m_{10} &= 1 \\
m_{20} &= 2 \\
m_{30} &= 3
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \end{array}\right)
$$

بقیه‌ی مراحل را انجام بدهید. در نهایت:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow
\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= -2 \\
x_2 &= 3 \\
x_3 &= -4
\end{aligned}
$$

دانشگاه خوارزمی

دستگاه معادلات $Ax=b$ را در نظر بگیرید. تجزیه‌ی LU عبارت است از تبدیل ماتریس ضرایب A به شکل حاصل ضرب ماتریس‌های بالامثلثی U و پایین مثلثی L.

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{00} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{10} & l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n-1,0} & l_{n-1,1} & \cdots & l_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0,n-1} \\ 0 & u_{11} & \cdots & u_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

$$l_{ij} = 0, \quad i < j$$

$$u_{ij} = 0, \quad i > j$$

$$a_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} l_{ik} u_{kj} \qquad i, j = 0,1,2,\cdots,n-1$$

روش کروت: $u_{ii} = 1, \quad i = 0,1,\cdots,n-1$

روش دولیتل: $l_{ii} = 1, \quad i = 0,1,\cdots,n-1$

روش چولسکی: $u_{ii} = l_{ii}, \quad i = 0,1,\cdots,n-1$

دانشگاه خوارزمی

برای حل دستگاه معادلات $Ax=b$ به روش تجزیه‌ی LU، دستگاه را به دو دستگاه بالامثلثی و پایین مثلثی تبدیل می کنیم:

$$\boxed{\mathbf{Ax = b}} \qquad \boxed{\mathbf{LUx = b}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\mathbf{Ux} &= \mathbf{y}\\ \mathbf{Ly} &= \mathbf{b}\end{aligned}}$$

در دستگاه دوم y را با جایگذاری پیش‌رو به دست می آوریم سپس با قرار دادنِ آن در دستگاه اول، x را با جایگذاری پس‌رو محاسبه می کنیم

دانشگاه خوارزمی

دستگاه زیر را به روش کروت حل کنید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 31 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{00} & 0 & 0 & 0 \\ l_{10} & l_{11} & 0 & 0 \\ l_{20} & l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{30} & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ 0 & 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سطر اول L را در ستون‌های U ضرب می کنیم. در نتیجه:

$$\begin{aligned} l_{00} &= 1 \\ l_{00}u_{01} &= 1 \Rightarrow u_{01} = 1 \\ l_{00}u_{02} &= 1 \Rightarrow u_{02} = 1 \\ l_{00}u_{03} &= 1 \Rightarrow u_{03} = 1 \end{aligned}$$

سطر دوم L را در ستون‌های U ضرب می کنیم. در نتیجه:

$$\begin{aligned} l_{10} &= 2 \\ l_{10}u_{01} + l_{11} &= 3 \Rightarrow l_{11} = 3 - l_{10}u_{01} = 1 \\ l_{10}u_{02} + l_{11}u_{12} &= 1 \Rightarrow u_{12} = (1 - l_{10}u_{02}) / l_{11} = 1 \\ l_{10}u_{03} + l_{11}u_{13} &= 5 \Rightarrow u_{13} = (5 - l_{10}u_{03}) / l_{11} = 3 \end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{00} & 0 & 0 & 0 \\ l_{10} & l_{11} & 0 & 0 \\ l_{20} & l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{30} & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ 0 & 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سطر سوم L را در ستون‌های U ضرب می کنیم. در نتیجه:

$$\begin{aligned} & l_{20} = 3 \\ & l_{20}u_{01} + l_{21} = 1 \Rightarrow l_{21} = 2 \\ & l_{20}u_{02} + l_{21}u_{12} + l_{22} = -5 \Rightarrow l_{22} = -2 \\ & l_{20}u_{03} + l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = 3 \Rightarrow u_{23} = 1 \end{aligned}$$

سطر چهارم L را در ستون‌های U ضرب می کنیم. در نتیجه:

$$\begin{aligned} & l_{30} = 3 \\ & l_{30}u_{01} + l_{31} = 1 \Rightarrow l_{31} = -2 \\ & l_{30}u_{02} + l_{31}u_{12} + l_{32} = 7 \Rightarrow l_{32} = 2 \\ & l_{30}u_{03} + l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = -2 \Rightarrow l_{33} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 31 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 31 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وارون یک ماتریس به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\boxed{\mathbf{AB} = \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}}$$

با تجزیه‌ی LU برای ماتریس A می توان نوشت:

$$\boxed{\mathbf{L}\left(\mathbf{UB}\right) = \mathbf{I}}$$

با حل دستگاه $LY=I$ و سپس حل دستگاه $UB=Y$ جواب $B=A^{-1}$ به دست می‌آید

مثال: وارون ماتریس زیر را محاسبه کنید

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

تجزیه‌ی LU برای ماتریس A (روش دولیتل):

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

با حل دستگاه $LC=I$ و سپس حل دستگاه $UB=C$ جواب $B=A^{-1}$ به دست می‌آید

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{-5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{-1}{8} & \frac{-3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

در بسیاری مسائل نیازمند محاسبه‌ی دترمینان یک ماتریس هستیم. اگر ماتریس A را به شکل حاصل ضرب ماتریس‌های پایین مثلثی و بالا مثلثی تجزیه کنیم، آن‌گاه

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{L})\det(\mathbf{U}) = \prod_{i=0}^{n-1} l_{ii} \prod_{i=0}^{n-1} u_{ii}$$

و اگر $l_{ii}=1$ باشد،

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{L})\det(\mathbf{U}) = \prod_{i=0}^{n-1} u_{ii}$$

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی