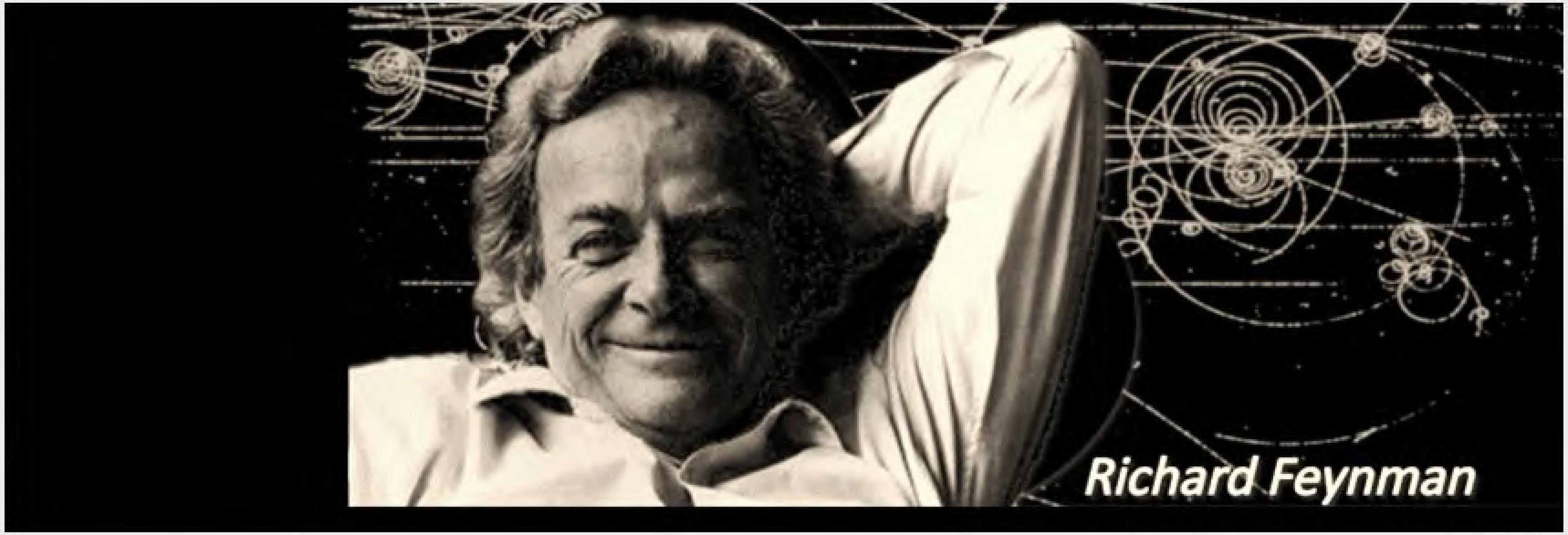
Numerical Calculations

Faculty of Physics – Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2022



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس هشتم

حل دستگاه معادلات خطی- بخش ۳

Solving Systems of Linear Equations-part3

دانشگاه خوارزمی

برای دستگاه‌های بزرگ (با تعداد معادلات زیاد مثلا ۱۰۰۰۰۰)، روش‌های مستقیم به سبب خطای گرد کردن، کارایی کم‌تری دارند. برای این دستگاه‌ها بهتر است از روش‌های تکراری استفاده کنیم.

به علاوه برای ماتریس‌های تُنُک (Sparse Matrix)، در روش‌های تکراری حافظه‌ی کم‌تری در کامپیوتر لازم است.

در روش تکراری برای حل دستگاه $\mathrm{Ax=b}$ آن را به شکل $\mathrm{x=Tx+c}$ می‌نویسیم. از یک حدس اولیه $x^{(0)}$ شروع می‌کنیم و در مراحل پی‌درپی دنباله‌ی $x^{(\mathrm{m})}$ از جواب‌های تقریبی را تولید می‌کنیم تا وقتی که پاسخ با دقت مشخصی به دست آید.

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c} \qquad k = 0,1,2,\cdots}$$

انتظار داریم که: $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)}$

مراحل را تا چه زمانی ادامه می‌دهیم؟

۱ - روند تکرار وقتی پایان می‌یابد که یک شرط همگرایی برقرار شود.

یک معیار توقف معمول به شکل زیر است:

$$\left|\frac{\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}}{\mathbf{x}^{(k)}}\right| < \epsilon$$

۲ - تعداد مراحل از یک مقدار مشخص بیش‌تر نشود

دانشگاه خوارزمی

$$
\begin{aligned}
a_{00}x_0 &+ a_{01}x_1 &+ \cdots + a_{0,n-1}x_{n-1} &= b_0\\
a_{10}x_0 &+ a_{11}x_1 &+ \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} &= b_1\\
\vdots\\
a_{n-1,0}x_0 &+ a_{n-1,1}x_1 &+ \cdots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} &= b_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_0^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{00}}\left(b_0 - a_{01}x_1^{(k)} - a_{02}x_2^{(k)} \quad \cdots - a_{0,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) = \frac{1}{a_{00}}\left(b_0 - \sum_{j=1}^{n-1} a_{0,j}x_j^{(k)}\right)\\
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{10}x_0^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \sum_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n-1} a_{1,j}x_j^{(k)}\right)\\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{20}x_0^{(k)} - a_{21}x_1^{(k)} \quad \cdots - a_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - \sum_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{n-1} a_{2,j}x_j^{(k)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1} a_{ij}x_j^{(k)}\right); \qquad i = 0,1,2,\cdots,n-1
$$

دانشگاه خوارزمی

مثال:

دستگاه زیر را به روش تکرار ژاکوبی حل کنید

$$\left(\epsilon = 10^{-3}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -9 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 10 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 13 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$x_0^{(k+1)} = \frac{17 + 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{7}$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-13 + x_0^{(k)} + 3x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{9}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{15 - 2x_0^{(k)} - x_3^{(k)}}{10}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{10 - x_0^{(k)} + x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{6}$$

حدس اولیه

$$\begin{pmatrix} x_0^{(0)} \\ x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_0^{(1)} &= 2.428571 \\ x_1^{(1)} &= -1.444444 \\ x_2^{(1)} &= 1.5 \\ x_3^{(1)} &= 1.666667 \end{aligned}$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned} x_0^{(9)} &= 2.000127 \\ x_1^{(9)} &= -1.000100 \\ x_2^{(9)} &= 1.000118 \\ x_3^{(9)} &= 1.000162 \end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

$$
\begin{aligned}
&a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0,n-1}x_{n-1} = b_0\\
&a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} = b_1\\
&\vdots\\
&a_{n-1,0}x_0 + a_{n-1,1}x_1 + \cdots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_0^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{00}}\left(b_0 - a_{01}x_1^{(k)} - a_{02}x_2^{(k)} \quad \cdots - a_{0,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \quad = \frac{1}{a_{00}}\left(b_0 - \sum_{j=0}^{i-1} a_{0,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{0,j}x_j^{(k)}\right)\\
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{10}x_0^{(k+1)} - a_{12}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \sum_{j=0}^{i-1} a_{1,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{1,j}x_j^{(k)}\right)\\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{20}x_0^{(k+1)} - a_{21}x_1^{(k+1)} \quad \cdots - a_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - \sum_{j=0}^{i-1} a_{2,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n-1} a_{2,j}x_j^{(k)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n-1} a_{ij}x_j^{(k)}\right); \qquad i = 0,1,2,\cdots,n-1
$$

دانشگاه خوارزمی

مثال:

دستگاه زیر را به روش تکرار گاوس-سایدل حل کنید

$$\left(\epsilon = 10^{-3}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -9 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 10 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 13 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$x_0^{(k+1)} = \frac{17 + 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{7}$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-13 + x_0^{(k+1)} + 3x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{9}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{15 - 2x_0^{(k+1)} - x_3^{(k)}}{10}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{10 - x_0^{(k+1)} + x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{6}$$

حدس اولیه

$$\begin{pmatrix} x_0^{(0)} \\ x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_0^{(1)} &= 2.428571 \\ x_1^{(1)} &= -1.174603 \\ x_2^{(1)} &= 1.014286 \\ x_3^{(1)} &= 0.897090 \end{aligned}$$

$\cdots$

$$\begin{aligned} x_0^{(5)} &= 2.000025 \\ x_1^{(5)} &= -1.000130 \\ x_2^{(5)} &= 1.000020 \\ x_3^{(5)} &= 0.999971 \end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

سؤال: آیا پاسخی که از روش تکرار به دست می‌آید با هر حدس اولیه‌ی $\mathrm{x}^{(0)}$ به جواب واقعی همگراست؟ به بیان دیگر آیا همواره با هر حدس اولیه‌ی $\mathrm{x}^{(0)}$ رابطه ی زیر برقرار است؟

تعریف: ماتریس غالب قطری اکید

ماتریس A_{nn} غالب قطری اکید نامیده می‌شود هرگاه قدر مطلق هر عنصر قطر از مجموع قدر مطلق عناصر غیر قطر در همان سطر بیش‌تر باشد

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n-1}\left|a_{ij}\right| \qquad i = 0,1,2,\cdots,n-1$$

شرط کافی برای همگرایی روش‌های ژاکوبی و گاوس- سایدل: اگر A ماتریس قطر غالب اکید باشد، روش‌های ژاکوبی و گاوس- سایدل به ازای هر تقریب اولیه‌ی $\mathrm{x}^{(0)}$ همگرا هستند.

دانشگاه خوارزمی

یک ماتریس غالب قطری اکید

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{a_{00} = 3 > |a_{01}| + |a_{02}| = 1 + 1 = 2}$$

$$\boxed{a_{11} = 4 > |a_{10}| + |a_{12}| = 2 + 0 = 2}$$

$$\boxed{a_{22} = 6 > |a_{20}| + |a_{21}| = 1 + 2 = 3}$$

دانشگاه خوارزمی

مثال:

$$
\begin{aligned}
-2x_0 + x_1 + 5x_2 &= 15 \\
4x_0 - 8x_1 + x_2 &= -21 \\
4x_0 - x_1 + x_2 &= 7
\end{aligned}
\qquad
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

ماتریس ضرایب غالب قطری اکید نیست. بنابر این تضمینی برای همگرایی روش ژاکوبی نیست.

جای سطر اول و سوم را تغییر می دهیم

$$
\begin{aligned}
4x_0 - x_1 + x_2 &= 7 \\
4x_0 - 8x_1 + x_2 &= -21 \\
-2x_0 + x_1 + 5x_2 &= 15
\end{aligned}
\qquad
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}
$$

این ماتریس ضرایب غالب قطری اکید است.

حدس اولیه: $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

دانشگاه خوارزمی

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

حدس اولیه: $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} x_0^{(k+1)} &= \frac{7 + x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{4} \\ x_1^{(k+1)} &= \frac{21 + 4x_0^{(k)} + x_2^{(k)}}{8} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{15 + 2x_0^{(k)} - x_1^{(k)}}{5} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_0^{(1)} &= \frac{7 + x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{4} = \frac{7+2-2}{4} = 1.75 \\ x_1^{(1)} &= \frac{21 + 4x_0^{(0)} + x_2^{(0)}}{8} = \frac{21+4+2}{8} = 3.375 \\ x_2^{(1)} &= \frac{15 + 2x_0^{(0)} - x_1^{(0)}}{5} = \frac{15+2-2}{5} = 3.00 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_0^{(19)} &= 2.00000000 \\ x_1^{(19)} &= 4.00000000 \\ x_2^{(19)} &= 3.00000000 \end{aligned}}$$

دانشگاه خوارزمی

مثال :

مثال قبل را به روش گاوس- سایدل حل کنید

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

حدس اولیه: $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$x_0^{(k+1)} = \frac{7 + x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{4}$$
$$x_1^{(k+1)} = \frac{21 + 4x_0^{(k+1)} + x_2^{(k)}}{8}$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{15 + 2x_0^{(k+1)} - x_1^{(k+1)}}{5}$$

$$x_0^{(1)} = \frac{7 + x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{4} = \frac{7 + 2 - 2}{4} = 1.75$$
$$x_1^{(1)} = \frac{21 + 4x_0^{(1)} + x_2^{(0)}}{8} = \frac{21 + 4 \times 1.75 + 2}{8} = 3.75$$
$$x_2^{(1)} = \frac{15 + 2x_0^{(1)} - x_1^{(1)}}{5} = \frac{15 + 2 \times 1.75 - 3.75}{5} = 2.95$$

$$x_0^{(10)} = 2.00000000$$
$$x_1^{(10)} = 4.00000000$$
$$x_2^{(10)} = 3.00000000$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی