شماره‌ی تکلیف: ۷

مسئله‌ی ۱:

دو لوله‌ی استوانه‌ای نازک رسانا به شعاع‌های a و b و طول بسیار زیاد در نظر بگیرید. این لوله‌ها هم محور هستند. اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی بین آن‌ها $\Phi_b - \Phi_a = V_0$ باشد، میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی را در فضای بین این دو لوله حساب کنید.

پاسخ ۱:

$$\mathbf{E} = \frac{V_0}{\rho \ln(b/a)} \hat{\mathbf{e}}_\rho \qquad a < \rho < b$$

ρ مختصات شعاعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای است. یعنی در این‌جا فاصله‌ی هر نقطه تا محور لوله‌هاست.

$$\Phi = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \ln \frac{\rho}{a}$$

مسئله‌ی ۲:

بررسی کنید که کدام یک از میدان‌های برداری زیر نمی‌تواند یک میدان الکتروستاتیک باشد.

☞ (الف) $\mathbf{E} = \alpha\Big[xy\hat{\mathbf{e}}_x + 2yz\hat{\mathbf{e}}_y + 3xz\hat{\mathbf{e}}_z\Big]$

☞ (ب) $\mathbf{E} = \alpha\Big[y^2\hat{\mathbf{e}}_x + (2yz + z^2)\hat{\mathbf{e}}_y + 2yz\hat{\mathbf{e}}_z\Big]$

α مقدار ثابتی است.

برای میدانی که می‌تواند یک میدان الکتروستاتیک باشد، پتانسیل الکتریکی، Φ را محاسبه کنید. درستی پاسخ خود را با محاسبه‌ی $-\nabla\Phi$ بررسی کنید.

پاسخ ۲: میدان (الف) نمی‌تواند یک میدان الکتروستاتیک باشد.

برای میدان (ب) پتانسیل الکتریکی به شکل زیر است:

$$\Phi(x, y, z) = -\alpha\left(xy^2 + yz^2\right)$$

مسئله‌ی ۳:

یک قرص دایره ای به شعاعِ R با چگالی سطحی σ در نظر بگیرید. پتانسیل الکتریکی این قرص را در نقطه‌ای بر روی لبه‌ی آن حساب کنید.

پاسخ ۳:

$$\Phi = \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0}$$

مسئله‌ی ۴:

کره‌ای به شعاعِ a و چگالی حجمی بار یکنواخت ρ_v در نظر بگیرید. درونِ این کره، یک حفره‌ی کروی به شعاع b وجود دارد. فاصله‌ی مرکزِ این حفره تا مرکزِ کره d است. پتانسیل الکتریکی را در مرکز حفره (نسبت به بی‌نهایت) حساب کنید.

پاسخ ۴:

$$\Phi = \frac{\rho_v}{6\epsilon_0}\left[3(a^2 - b^2) - d^2\right]$$

مسئله‌ی ۵:

برای اتم هیدروژن، میانگین زمانی پتانسیل الکتریکی به شکل زیر است

$$\Phi(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-2r/a_0}}{r}\left(1 + \frac{r}{a_0}\right)$$

که در آن e اندازه‌ی بار الکترون و a_0 شعاع بوهر است. توزیع بار الکتریکی مربوط به این پتانسیل را به دست آورید.

مسئله‌ی ۶:

فرض کنید مشاهدات و اندازه‌گیری‌های جدید نشان می‌دهد که میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای q واقع در نقطه‌ی $\mathbf{x}'$ در نقطه‌ی $\mathbf{x}$، از رابطه‌ی زیر به دست می آید

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}\left(1 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\lambda}\right)\exp\left[-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\lambda}\right]$$

که در آن λ ثابتی است که دیمانسیون طول دارد و مقدار آن بسیار بزرگ است. فرض کنید اصل برهم‌نهی کماکان برقرار است.

الف) میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع حجمی بار ρ_v را به دست آورید.

ب) نشان دهید برای این میدان می‌توان یک پتانسیل اسکالر تعریف کرد.

ج) پتانسیل الکتریکی $\Phi(r)$ ناشی از یک بار نقطه‌ای q واقع در مبدا مختصات را در نقطه‌ای به فاصله‌ی r از بار نقطه‌ای به دست آورید. مبدأ پتانسیل را در بی‌نهایت در نظر بگیرید.

د) بار نقطه‌ای q در مبدأ مختصات قرار دارد، نشان دهید

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da + \frac{1}{\lambda^2}\int_V \Phi(r)dv = \frac{q}{\epsilon_0}$$

که S سطح و V حجم کره‌ای به مرکز بار q و شعاع دلخواه است.